Tutoraggio Analisi II

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Ingegneria Civile ed Industriale

Sapienza Università di Roma

Andrea Di Biagio*

Settimana 5

Curve di Jordan, Lunghezze e Integrali Curivilinei di Prima Specie

Esercizio 1.

Determinare se la curva

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{cases} (t, t^2), & t \in [0,1) \\ (2-t, 2-t), & t \in [1,2] \end{cases} \end{aligned}$$

è una curva di Jordan (e in caso determinarne l'orientazione). Calcolare il vettore velocità $\boldsymbol{\gamma}'$ della curva e la sua norma.

Soluzione 1.

Curva di Jordan.

Una curva $\boldsymbol{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dice di Jordan se è piana, chiusa e semplice. Piana significa che il codominio è $\mathbb{R}^2$. Chiusa significa che inizia e finisce nello stesso punto $\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\gamma}(b)$. Una curva è semplice se non ci sono auto-intersezioni, cioè se iniettiva quando ristretta su (a,b).

Vediamo subito che la nostra $\boldsymbol{\gamma}$ è piana, e siccome $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0,0) = \boldsymbol{\gamma}(2)$ è chiusa. Per vedere se è iniettiva, dobbiamo dimostrare che

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t') \iff t = t'.$$

Dimostrare che la curva è iniettiva è più difficile di solito. La curva è iniettiva su $[0,1)$ e $[1,2]$ separatamente, quindi può intersecarsi solo se t e t' sono nei sotto-intervalli diversi. Se guardiamo il primo componente potremmo scoraggiarci, perché $\gamma_1(t) = \gamma_1(t')$ ha tantissime soluzioni. Consideriamo un punto $t \in [1,2)$, allora $\gamma_1(t) = 2-t$, ma $2-t \in (0,1]$ quindi $\gamma_1(2-t) = 2-t = \gamma_1(t)$ per ogni $t \in [1,2)$. Però entrambi i componenti devono essere uguali simultaneamente. Vediamo quindi se

$$\gamma_2(t) = 2-t$$

è uguale a

$$\gamma_2(t') = \gamma_2(2-t) = (2-t)^2,$$

cioè proviamo a risolvere

$$(2-t)^2 = (2-t).$$

Questo ha due soluzioni: $t = 2$ e $t = 1$. $t = 2$ è la fine della curva, quindi non è un problema, e $t = 1$ significa che $t' = 2 - t = t$. Quindi non ci sono soluzioni di $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t')$ con $t \neq t'$ in $(0,2)$ e la curva è semplice. $\boldsymbol{\gamma}$ è una curva di Jordan. L'orientazione è positiva siccome la curva viene percorsa in senso anti-orario.

*andrea.dibiagio@uniroma1.it

Vettore velocità.
Il vettore $\boldsymbol{\gamma}'$ velocità è semplicemente la derivata di $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = \left(\frac{d}{dt}\gamma_1(t), \frac{d}{dt}\gamma_2(t)\right).$$

La nostra $\boldsymbol{\gamma}$ è C^∞ a tratti, quindi possiamo calcolare le derivate tranquillamente:

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = \begin{cases} (1, 2t), & t \in [0,1) \\ (-1,-1), & t \in [1,2]. \end{cases}$$

La *norma* è:

$$\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| = \begin{cases} \sqrt{1+4t^2}, & t \in [0,1) \\ \sqrt{2}, & t \in [1,2] \end{cases}$$

Esercizio 2.
Verificare che la curva

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} : [0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\longmapsto \begin{cases} (e^\theta - 1, e^{2\theta} - 2e^\theta + 1), & \theta \in [0, \ln 2) \\ (3 - e^\theta, 3 - e^\theta), & \theta \in [\ln 2, \ln 3] \end{cases} \end{aligned}$$

sia equivalente alla curva $\boldsymbol{\gamma}$ dell'esercizio precedente.

Soluzione 2.
Due curve $\boldsymbol{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 sono equivalenti se esiste un esiste una biiezione $\varphi : [a,b] \mapsto [c,d]$ tale che φ è C^1 su $[a,b]$, $\varphi'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a,b]$ e se

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\big(\varphi(t)\big) = \boldsymbol{\gamma}(t), \quad \text{se} \quad t \in [a,b]. \tag{1}$$

Questa φ è chiamata cambio di parametrizzazione. Nel nostro caso, notiamo che $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(0) = (0,0) = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\ln 3)$ quindi la curva è chiusa. La seconda parte della curva è la retta dal punto $(1,1)$ all'origine, come per $\boldsymbol{\gamma}$ in più, notiamo che $e^{2\theta} - 2e^\theta + 1 = \big(e^\theta - 1\big)^2$. Sono tutti indizi che le curve siano equivalenti. Per dimostrare l'equivalenza però dobbiamo trovare il cambio di parametrizzazione φ. La presenza di esponenziali ci invita a provare qualcosa del tipo $\varphi(t) = \ln t$. Questo non può essere perché ln non è definita su $[0,2]$. Possiamo però provare

$$\varphi(t) = \ln(1+t).$$

Il logaritmo è una funzione biiettiva, quindi mappa $\varphi : [0,2] \to [\ln 1, \ln 3]$ è una biiezione. Incoraggiante. Poi,

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+t} \neq 0$$

su tutto $[0,2]$. Molto bene. Ci manca solo di verificare se la (1) regge. Procediamo per pezzo per pezzo. Quando $\ln(1+t) \in [0, \ln 2)$, abbiamo

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\big(\varphi(t)\big) = \left(e^{\ln(1+t)} - 1, \big(e^{\ln(1+t)} - 1\big)^2\right) = (t, t^2)$$

e abbiamo $\ln(1+t) \in [0, \ln 2) \iff t \in [0,1)$. Quindi $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\big(\varphi(t)\big) = \boldsymbol{\gamma}(t)$ se $t \in [0,1)$. Guardiamo l'altro pezzo. Se $\ln(1+t) \in [\ln 2, \ln 3)$ allora

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\big(\varphi(t)\big) = \big(3 - e^{\ln(1+t)}, 3 - e^{\ln(1+t)}\big) = (2-t, 2-t)$$

e $\ln(1+t) \in [\ln 2, \ln 3] \iff t \in [1,2]$ quindi $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\big(\varphi(t)\big) = \boldsymbol{\gamma}(t)$ anche se $t \in [1,2]$. Le due curve sono quindi equivalenti.

Esercizio 3.
La curva

$$\boldsymbol{\gamma}(z) = \left(r\cos\left(\frac{2\pi z}{d}\right), r\sin\left(\frac{2\pi z}{d}\right), z \right)$$

descrive una spirale cilindrica di raggio r che fa un giro ogni d unità di distanza. Calcolare la lunghezza di questa curva per $t \in [0, Nd]$ (questo può servire per calcolare quanto materiale serve per fare N giri).

Soluzione 3.
Se una curva $\boldsymbol{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^1, la lunghezza è data da

$$L(\boldsymbol{\gamma}) = \int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \mathrm{d}t.$$

Calcoliamo subito la derivata della curva,

$$\boldsymbol{\gamma}'(z) = \left(-\frac{2\pi r}{d}\sin\left(\frac{2\pi z}{d}\right), \frac{2\pi r}{d}\cos\left(\frac{2\pi z}{d}\right), 1 \right),$$

e la sua norma:

$$\|\boldsymbol{\gamma}'(z)\| = \sqrt{\left(\frac{2\pi r}{d}\right)^2 \left(\sin^2(2\pi z/d) + \cos^2(2\pi z/d)\right) + 1} = \sqrt{\left(\frac{2\pi r}{d}\right)^2 + 1}.$$

La lunghezza della curva è dunque:

$$L(\boldsymbol{\gamma}) = \int_0^{Nd} \sqrt{\left(\frac{2\pi r}{d}\right)^2 + 1}\ \mathrm{d}t = Nd\sqrt{\left(\frac{2\pi r}{d}\right)^2 + 1}$$

Esercizio 4.
Calcolare la lunghezza della curva

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(\sinh t^2, 6\sinh t^2\right). \end{aligned}$$

Soluzione 4.
Per calcolare la lunghezza potremmo calcolare la velocità della curva:

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = 2t\left(\cosh t^2, 6\sinh t^2\right),$$

poi calcolarne la norma

$$\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| = 2t\sqrt{\cosh^2 t^2 + 36\sinh^2 t^2}$$

e poi trovare il valore dell'integrale

$$L(\boldsymbol{\gamma}) = \int_0^1 2t\sqrt{\cosh^2 t^2 + 36\sinh^2 t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Alternativamente, potremmo vedere che la curva γ non è altro che la retta dall'origine al punto $\big(\sinh(1), 6\sinh(1)\big)$ e usare il teorema di Pitagora per trovare immediatamente:

$$L(\boldsymbol{\gamma}) = \sqrt{\sinh^2(1) + 36\sinh^2(1)} = \sinh(1)\sqrt{37}$$

Esercizio 5.
Calcolare l'integrale curvilinea di prima specie

$$I = \int_\gamma y \mathrm{d}s$$

lungo la curva

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t^4, t^2) \end{aligned}$$

Soluzione 5.
L'integrale curvilinea di prima specie di una funzione $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lungo una curva $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è data da:

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{f} \mathrm{d}s := \int_a^b \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \mathrm{d}t \tag{2}$$

Calcoliamo la velocità della curva

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = (4t^3, 2t)$$

e quindi la norma

$$\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| = \sqrt{16t^6 + 4t^2} = 2t\sqrt{4t^4 + 1}$$

Nel nostro caso $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f(x, y) = y$, quindi $f(\boldsymbol{\gamma}(t)) = t^2$, quindi scriviamo:

$$I := \int_0^T 2t^3 \sqrt{4t^4 + 1} \mathrm{d}t$$

riconosciamo che $2t^3 \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \mathrm{d}\left(t^4\right)$ quindi facciamo il cambio di variabili $u = t^4$, e

$$I = \int_0^{T^4} \sqrt{4u + 1} \ \mathrm{d}u.$$

Cambiamo di nuovo variabili con $v = 4u + 1$,

$$I = \frac{1}{8} \int_1^{4T^4+1} \sqrt{v} \ \mathrm{d}v = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \left[(4T^4 + 1)^{3/2} - 1\right].$$

Esercizio 6.
Calcolare l'integrale curvilinea di prima specie

$$I = \int_{\boldsymbol{\gamma}} xy^2 \mathrm{d}s$$

dove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(t, \sqrt{1 - t^2}\right) \end{aligned}$$

Soluzione 6.
Calcolare la derivata di $\boldsymbol{\gamma}$ è abbastanza facile:

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right),$$

e la sua norma è

$$\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-t^2}}.$$

Quindi

$$I = \int_0^1 t(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

Facciamo il cambio di variabili $u = t^2$:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{1-u}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[(1-u)^{3/2}\right]_1^0 = \frac{1}{3}$$

Esercizio 7.
Calcolare l'integrale curvilinea di prima specie

$$\tilde{I} = \int_{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}} xy^2\mathrm{d}s$$

dove

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\gamma}} : [0, \pi/2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ t &\longmapsto (\cos\theta, \sin\theta)\end{aligned}$$

Soluzione 7.
Calcoliamo la velocità della curva: $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$, e la velocità è quindi costante $\|\tilde{\boldsymbol{\gamma}}'(\theta)\| = 1$. L'integrale è quindi

$$\tilde{I} = \int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^1 \sin^2\theta\mathrm{d}(\sin\theta) = \frac{1}{3}$$

Il sostegno di $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ è la parte del cerchio di raggio 1 che giace nel primo quadrante del piano, cioè dove $x, y \geq 0$. Questo è lo stesso sostegno della curva dell'esercizio precedente. Infatti è abbastanza facile dimostrare usando la funzione

$$\begin{aligned}\varphi : [0, \pi/2] &\longrightarrow [0, 1]\\ \theta &\longmapsto \cos\theta\end{aligned}$$

che le due curve sono equivalenti. Si nota che φ è biiettiva, $\varphi' < 0$ in $(0, \pi/2)$ e

$$\boldsymbol{\gamma}\big(\varphi(\theta)\big) = \boldsymbol{\gamma}(\cos\theta) = \left(\cos\theta, \sqrt{1-\cos^2\theta}\right) = (\cos\theta\sin\theta) = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\theta).$$

Siccome l'integrale curvilineo di prima specie non dipende dalla parametrizzazione della curva, possiamo immediatamente concludere che $\tilde{I} = \frac{1}{3}$.