Tutoraggio Analisi II

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Ingegneria Civile ed Industriale

Sapienza Università di Roma

Docente: Anna Chiara Lai

Tutor: Andrea Di Biagio*

Settimana 12

Serie di Potenze e Serie di Taylor

Nello studiare le serie di potenze, ci si può avvalere di risultati abbastanza potenti. Sia $\{c_n\}$ una successione reale, e consideriamo la serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Se la serie converge per x_1 allora la serie converge assolutamente per tutti x tali che $|x| < |x_1|$. Sia E l'insieme di convergenze della serie e si definisca il raggio di convergenza $r = \sup_{x \in E} |x|$. La serie converge assolutamente per tutti x tali che $|x| < r$ e non converge per nessun valore di x tale che $x > |r|$. Infine, se L è il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad \text{oppure} \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|,$$

allora questo determina il raggio di convergenza:

$$r = \begin{cases} 0 & \text{se } L = \infty, \\ \frac{1}{L} & \text{se } L \in (0,\infty), \\ \infty & \text{se } L = 0. \end{cases}$$

Esercizio 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Soluzione 1.
Notiamo che

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

quindi il raggio di convergenza è 1, e quindi $(-1,1) \subseteq E$. Ci rimane da considerare i casi $x = \pm 1$.

Cominciamo con il caso $x = 1$. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

*andrea.dibiagio@uniroma1.it

è una serie armonica generalizzata. Le serie armoniche generalizzate,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

convergono[1] per $p > 2$, quindi la nostra serie converge. Nel caso $x = -1$ abbiamo la serie,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

e siccome $|(-1)^n| = 1$, la serie per $x = -1$ converge assolutamente se e solo se la serie per $x = 1$ converge, cosa che abbiamo appena dimostrato.

Concludiamo che $E = [-1, 1]$.

Esercizio 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(2x)^n$$

Soluzione 2.
Notiamo che

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)}{n}\frac{2^{n+1}}{2^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot 2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$

quindi il raggio di convergenza è $1/2$ e $(-1/2, 1/2) \subseteq E$. Per il caso $x = 1/2$ abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} n$$

quindi la serie è divergente. Nel caso $x = -1/2$, abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n.$$

Questa è serie è divergente. Infatti una condizione necessaria perché una serie converga è che i termini tendono a 0, che non è il caso.

Concludiamo quindi che $E = (-1/2, 1/2)$.

[1] Se uno si fosse dimenticato il teorema, potrebbe salvarsi paragonando la serie ad un'integrale improprio che converge. Infatti con un ragionamento grafico, ci si può convincere che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} \mathrm{d}x.$$

Questo perché la serie a sinistra è la somma di aree di parallelepipedi di altezza $1/n^2$ e larghezza 1, e questo sono un sottoinsieme dell'aera sotto la curva $y = 1/x^2$. L'integrale improprio converge:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} \mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = 1,$$

e quindi la serie converge.

Esercizio 3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$$

Soluzione 3.

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

Quindi la serie converge solo per $x = 0$.

Esercizio 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^n}$$

Soluzione 4.
Notiamo che

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{1}{(\ln n)^n}\right|} = \frac{1}{\ln n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e quindi la serie converge per tutti i valori di x.

Esercizio 5.
La serie di Taylor per $\ln(1+x)$ intorno a 0 è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

e converge[2] per $x \in E = (-1, 1]$. Non la si può usare quindi usare per calcolare $\ln 3$. Trovare la serie di Taylor intorno a $x = 0$ di

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

determinarne l'insieme di di convergenza. Usare la serie di Taylor per approssimare $\ln 3$.

Soluzione 5.
Notiamo che

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

e che la serie di Taylor per $\ln(1-x)$ è

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-x)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n,$$

dove abbiamo usato $(-1)^{n+1} \cdot (-1)^n = (-1)^{2n+1} = -1$. Anche questa serie converge per $x \in E$. Quindi la nostra funzione è la somma di due funzioni sviluppabili in serie di Taylor e quindi per ogni $x \in (-1, 1)$ abbiamo

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \frac{1}{n} x^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1 + (-1)^{n+1}\right) x^n.$$

[2]**NB:** In classe ho erroneamente detto che la serie non converge per $x = 1$. La convergenza si dimostra con il criterio di Liebniz.

Notiamo che i termini della serie sono 0 quando n è pari e $2x^n$ quando n è dispari. Possiamo riscrivere

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Ora,

$$\frac{1+x}{1-x} = 3 \iff x = \frac{1}{2} \in E,$$

e quindi

$$\ln 3 = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

Usando i primi tre termini:

$$\ln 3 \approx 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64} = \frac{7379}{6720} = 1.09807$$

che è giusto fino a tre cifre decimali.

Esercizio 6.
Usare la serie di Taylor per calcolare un valore approssimato di

$$I = \int_0^1 e^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

Soluzione 6.
La funzione esponenziale è analitica in $\mathbb{R}$ e

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

e quindi abbiamo per tutti $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{-t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-t^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\cdot t^{2n}.$$

Inoltre, possiamo scambiare la somma con l'integrale:

$$\int_0^1 e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\int_0^1 t^{2n}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\frac{1}{2n+1}$$

Usando i primi 4 termini

$$I \approx 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4\cdot 2\cdot 5} - \frac{1}{8\cdot 6\cdot 7} = \frac{469}{560} = 0.855357.$$

Questa stima è corretta a tre cifre decimali.

Esercizio 7.
Determinare l'insieme di convergenza della successione di funzioni $\{f_n\}$, dove

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Sia f la funzione tale che, per ogni x nell'insieme di convergenza, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Trovare f e la sua derivata f'. Determinare il limite della successione $\{f_n'(0)\}$.

Soluzione 7.
Per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

quindi il dominio di convergenza è l'intero $\mathbb{R}$. Chiaramente $f(x) = f'(x) = 0$. Mentre abbiamo,

$$f_n'(x) = \cos(nx)$$

ed in particolare, $f_n'(0) = 1$. Notiamo quindi che $\lim_{n\to\infty} f_n'(0) \neq f'(0)$.