Tutoraggio Analisi II

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Ingegneria Civile ed Industriale

Sapienza Università di Roma

Docente: Anna Chiara Lai

Tutor: Andrea Di Biagio*

Settimana 13

Successioni e Serie di Funzioni

Esercizio 1.
Sia $\{f_n\}$ la successione di funzioni

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^n, \end{aligned}$$

Determinare il dominio di convergenza puntuale D della successione e la funzione f a cui converge. Studiare la convergenza uniforme.

Soluzione 1.
Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \\ +\infty & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

e non è definito se $x \leq -1$. Quindi $\{f_n\}$ converge puntualmente in $D = (-1, 1]$ alla funzione:

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Siccome una successone di funzioni continue che converge uniformemente converge ad una funzione continua, e f è discontinua, sappiamo che $\{f_n\}$ non converge uniformemente in D. In effetti

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(-1,1)} |x^n| = 1.$$

La successione però converge uniformemente in sottoinsieme compatto dell'interno $\mathring{D}$ di D. Infatti, se $K \subset (-1, 1)$ è compatto e $k = \sup_{x\in K} |x|$, allora

$$\sup_{x\in K} |f_n(x)| = \sup_{x\in K} |x^n| = k^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e la convergenza è dunque uniforme in K.

*andrea.dibiagio@uniroma1.it

Esercizio 2.
Sia $\{g_n\}$ la successione di funzioni

$$\begin{aligned} g_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (1-x^2)x^n, \end{aligned}$$

Determinare il dominio di convergenza puntuale E della successione e la funzione g a cui converge. Studiare la convergenza uniforme.

Soluzione 2.
A differenza delle f_n, abbiamo $g_n(-1) = g_n(1) = 0$. Quindi questa successione converge puntualmente in $E = [-1, 1]$ alla funzione costante

$$\begin{aligned} g : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Siccome g è chiaramente continua, c'è la possibilità di una convergenza uniforme. Abbiamo

$$\sup_{x\in E} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x\in E} |g_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} g_n(x).$$

dove per l'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che $|g_n(x)| = |g_n(-x)|$ e che $g_n(x) \geq 0$ se $x \geq 0$. Per trovare il sup, massimizziamo g_n in $[0, 1]$. Siccome $g_n(0) = g_n(1) = 0$, il massimo di g_n si trova tra i punti critici in $(0, 1)$. Ce n'è solo uno:

$$g_n'(x) = n(1-x^2)x_c^{n-1} - 2x^{n+1} = (n-(2+n)x^2)x^{n-1} = 0 \iff x = \sqrt{\frac{n}{2+n}}.$$

Così possiamo dimostrare che il sup tende a zero,

$$\sup_{x\in E} |g_n(x)| = g_n\left(\sqrt{\frac{n}{2+n}}\right) = \left(1 - \frac{n}{2+n}\right)\left(\sqrt{\frac{n}{2+n}}\right)^n \leq 1 - \frac{n}{2+n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

e quindi che g_n converge uniformemente a g in E.

Esercizio 3.
Sia $\{f_n\}$ la successione di funzioni

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto n \cdot \max\left(1 - n|x|, 0\right). \end{aligned}$$

Calcolare

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Studiare la convergenza convergenza puntuale e uniforme della successione. Sia E il dominio di convergenza puntuale della successione. Calcolare

$$\tilde{I} = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Soluzione 3.
Notiamo che la funzione $f_n(x)$ è 0 per $|x| \geq 1/n$, cresce linearmente da 0 a n per $x \in [-1/n, 0]$ e decresce linearmente da n a 0 per $x \in [0, 1/n]$. Quindi l'integrale

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x$$

non è altro che l'area del triangolo T_n con vertici i punti di coordinate $(-1/n, 0)$, $(0, n)$ e $(1/n, 0)$ e quindi

$$I_n = A(T_n) = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

e $I = \lim_{n\to\infty} I_n = 1$.

Studiamo ora la convergenza puntuale. Notiamo subito che

$$f_n(0) = n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

quidni la successione non converge all'origine 0. Mentre per $x \neq 0$, per definizione,

$$f_n(x) = 0 \iff 1 - n|x| \leq 0 \iff \frac{1}{|x|} \leq n.$$

Quindi $f_n(x) = 0$ appena $n \geq 1/|x|$. Quindi il dominio di convergenza di $\{f_n\}$ è $E = \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e converge alla funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

Siccome la funzione f è continua, la convergenza potrebbe essere anche uniforme. Vediamo però che

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in E} |f_n(x)| = \sup_{x\in[-1/n,1/n]} n\left(1 - n|x|\right) = n.$$

E quindi non c'è convergenza uniforme in E. Notiamo però che $\{f_n\}$ converge uniformemente in sottoinsiemi compatti dell'interno di E. Infatti, in qualunque insieme U tale che $u := \inf_{x\in U} |x| > 0$, abbiamo $f_n(x) = 0$ per $n > 1/u$.

Infine, l'integrale $\tilde{I}$ è facile da calcolare:

$$\tilde{I} = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Esercizio 4.
Studiare la convergenza totale, uniforme e puntuale in della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-0.5)^n}{n} x^2 e^{-x}$$

in $E = [0, \infty)$. Determinare la funzione f a cui la serie converge.

Soluzione 4.
Possiamo dimostrare che la serie converge totalmente. Scriviamo

$$f_n(x) = c_n g(x),$$

dove $g(x) = x^2 e^{-x}$ e

$$c_n = \frac{(-0.5)^n}{n}.$$

Notiamo che per ogni n, $f_n(x) \geq 0$, quindi

$$|f_n(x)| = f_n(x) = c_n g(x) \leq c_n \sup_{x \in E} g(x).$$

Siccome e $g(0) = 0 = \lim_{x\to\infty} g(x)$, il massimo di $g(x)$ va trovato tra i punti critici di g in $\mathring{E}$. Ce n'è solo uno:

$$g'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2-x)xe^{-x} = 0 \iff x = 2.$$

Quindi $g(x) \leq g(2) = 4e^{-2}$ e $|f_n(x)| \leq 4e^{-2}c_n$. Notiamo in oltre che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4e^{-2}c_n$$

è convergente. Infatti, possiamo usare la serie di Taylor del logaritmo

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4e^{-2}c_n = 4e^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-0.5)^n}{n} = -4e^{-2} \ln(1+0.5) = -4e^{-2} \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Quindi la serie $\sum f_n$ converge totalmente in E. La funzione a cui converge è quella a cui converge puntualmente:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g(x) = g(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n = -\ln\left(\frac{3}{2}\right) x^2 e^{-x}.$$

Esercizio 5.
Sia $E = [0, \pi/2]$ e $\{f_n\}$ la successione di funzioni

$$\begin{aligned} f_n : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\cos(nx)}{n^2} \end{aligned}$$

Studiare la convergenza totale, uniforme e puntuale in della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Calcolare

$$I = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \mathrm{d}x.$$

Soluzione 5.
Notiamo che $|f_n(x)| \leq 1/n^2$ e che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge (lo abbiamo visto l'altra volta). Quindi la serie di funzioni converge totalmente. In particolare, converge anche uniformemente. Questo ci permette di scambiare l'integrale e la somma in

$$I = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x) \mathrm{d}x := \sum_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Per fortuna, perché è più difficile calcolare la funzione limite. Mentre

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(nx)}{n^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{n^3}\left(\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \sin(n \cdot 0)\right) = \frac{1}{n^3}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Gli integrali I_n sono 0 per valori di n pari, quindi:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}.$$