Tutoraggio Analisi II

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Ingegneria Civile ed Industriale
Sapienza Università di Roma

Andrea Di Biagio*

Settimana 3

Differenziabilità, piano tangente, polinomio di Taylor

Esercizio 1.
Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$ della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y e^x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soluzione 1.
Continuità. Analizziamo la funzione in coordinate polari:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta e^{r\cos\theta}}{r} = r^2\cos^2\theta\sin\theta e^{r\cos\theta}.$$

Quindi $\lim_{r\to} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$ per ogni valore di θ. La funzione è quindi continua quando è ristretta su una qualunque retta che passa per l'origine. Per dimostrare che f stessa e continua, dobbiamo dimostrare che la convergenza è uniforme in θ. Notiamo intanto che $|\cos^2\theta\sin\theta| \leq 1$. Siccome la funzione e^x è monotona crescente e $r\cos\theta < r$, possiamo scrivere anche

$$e^{r\cos\theta} \leq e^r.$$

Quindi abbiamo

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = r^2 \cdot |\cos^2\theta\sin\theta| \cdot e^{r\cos\theta} \leq r^2 e^r \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

Abbiamo trovato una funzione di solo r che maggiora f e che tende a 0, quindi f tende a 0 in maniera uniforme in θ e quindi è continua.

Derivabilità Vi ricordo che le derivate parziali all'origine sono definite così:

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &:= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}, \\ \partial_y f(x,y) &:= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}. \end{aligned} \tag{1}$$

Calcoliamo le derivate parziali per f:

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h^2\cdot 0\cdot e^h}{h^2} - 0\right) = 0$$
$$\partial_y f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{0\cdot h\cdot 1}{h^2} - 0\right) = 0.$$

*andrea.dibiagio@uniroma1.it

Quindi f è derivabile e il gradiente[1] è nullo all'origine.

$$\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{0}) := \big(\partial_x f(0,0), \partial_y f(0,0)\big) = \mathbf{0}.$$

Differenziabilità Vi ricordo che una funzione è differenziabile in un punto $\boldsymbol{x_0}$ se e solo se è derivabile in quel punto e

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x_0}) + \langle \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x_0}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} \rangle + o\left(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\|\right), \tag{2}$$

dove $\boldsymbol{\nabla} f = (\partial_x f(\boldsymbol{x_0}), \partial_y f(\boldsymbol{x_0}))$. Nel nostro caso, per dimostrare che f è differenziabile all'origine, dobbiamo dimostrare che $|f| = o(r)$. Abbiamo visto sopra che

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq r^2\, e^r$$

e abbiamo quindi

$$\frac{|f(r\cos\theta, r\sin\theta)|}{r} \leq r\, e^r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Quindi $f = o(r)$ e la funzione è differenziabile.

Esercizio 2.
Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$ della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soluzione 2.
Continuità Analizziamo la funzione in coordinate polari:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = r\cos^2\theta\sin\theta.$$

Per ogni θ abbiamo $\lim_{r\to 0} f = 0$, quindi la funzione è continua quando ristretta su una qualsiasi retta che passa per l'origine. Poi si noti che

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq r,$$

da cui si vede che la convergenza è omogenea in θ e quindi f è continua all'origine.

Derivabilità Siccome $f(x,0) = f(0,y) = f(0,0) = 0$, entrambe le derivate parziali esistono e sono nulle. Abbiamo $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x_0}) = \mathbf{0}$.

Differenziabilità Se f fosse differenziabile, allora avremmo

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\mathbf{0}) + \langle \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{0}), \boldsymbol{x} \rangle + o\big(\|\boldsymbol{x}\|\big) = 0 + o\big(\|\boldsymbol{x}\|\big).$$

Vediamo se è vero che $f = o(r)$:

$$\frac{|f(r\cos\theta, r\sin\theta)|}{r} = \frac{r^3|\cos^2\theta\sin\theta|}{r^3} = |\cos^2\theta\sin\theta|.$$

Quindi $f(\mathbf{0}) \neq o\left(\|\boldsymbol{x}\|\right)$ e la funzione non è differenziabile, anche se continua e derivabile.

[1] Qui useremo il grassetto per indicare un vettore. Quindi ogni scriveremo espressioni del tipo $\boldsymbol{x} = (x,y)$, $\boldsymbol{x_0} = (x_0, y_0)$. Il simbolo $\boldsymbol{\nabla}$ non è un vettore per conto suo, ma $\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = \big(\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y)\big)$ è una funzione che prende valori vettoriali.

Esercizio 3.
Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$ della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Soluzione 3.
Questo è un esempio di una funzione che è derivabile anche se non è continua.

Continuità Abbiamo visto la settimana scorsa che f non è continua all'origine.

Derivabilità Calcoliamo le derivate parziali. Siccome $f(x,0) = 0$ per definizione, abbiamo $\partial_x f(0,0) = 0$, mentre

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0+h^2}{h^2} = 1.$$

Quindi f è derivabile all'origine (anche se non è continua) e $\boldsymbol{\nabla} f(0,0) = (0,1)$.

Differenziabilità Se una funzione è differenziabile in un punto, allora è necessariamente continua in quel punto. Sappiamo che f non è continua all'origine, quindi non può essere differenziabile lì. Lo possiamo comunque dimostrare in maniera diretta usando (2). Abbiamo $f(0,0) + \langle \boldsymbol{\nabla} f(0,0), \boldsymbol{x} \rangle = y$, e quindi

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) - y = \frac{r}{\sin\theta} - r\sin\theta \neq o(r)$$

perché per ogni r l'espressione in mezzo può prendere valori arbitrariamente larghi.

Esercizio 4.
Trovare l'equazione del piano tangente e calcolare il polinomio di Taylor fino al secondo grado della seguente funzione:

$$f(x,y) = e^{-(x^2+ay^2)}.$$

Soluzione 4.
Piano Tangente Ricordiamoci che l'equazione del piano tangente di una funzione differenziabile f al punto $\boldsymbol{x_0}$ è data da:

$$z(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x_0}) + \langle \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x_0}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} \rangle . \tag{3}$$

Per una funzione in due variabili, con $\boldsymbol{x_0} = (x_0, y_0)$, possiamo scrivere:

$$z(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\cdot \partial_x f(x_0,y_0) + (y-y_0)\cdot \partial_y f(x_0,y_0). \tag{4}$$

La funzione è smooth su tutto il piano. Calcoliamo le derivate parziali usando la regola della catena per le derivate parziali.

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= e^{-(x^2+ay^2)} \cdot \partial_x \left[-(x^2+ay^2) \right] = -2xf(x,y) \\ \partial_y f(x,y) &= e^{-(x^2+ay^2)} \cdot \partial_y \left[-(x^2+ay^2) \right] = -2ayf(x,y), \end{aligned}$$

e inseriamole nella formula (4):

$$z(x,y) = f_0 - 2x_0 f_0 \cdot (x-x_0) - 2ay_0 f_0 \cdot (y-y_0) = f_0 \cdot (1 - 2x_0(x-x_0) - 2ay_0(y-y_0)),$$

dove abbiamo definito la costante $f_0 := f(x_0,y_0)$ per rendere la formula più leggibile.

Polinomio di Taylor Ricordiamo che il polinomio di Taylor T_2 di ordine due di una funzione smooth f intorno a $\boldsymbol{x_0}$ è

$$T_2(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x_0}) + \langle \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x_0}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} \rangle + \frac{1}{2} \left\langle D^2 f(\boldsymbol{x_0}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} \right\rangle, \tag{5}$$

dove $D^2 f(\boldsymbol{x_0})$ indica la matrice hessiana, i componenti della quale sono le seconde derivate parziali di f nel punto $\boldsymbol{x_0}$. Per una funzione in due variabili abbiamo:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(x,y) & \partial_x \partial_y f(x,y) \\ \partial_y \partial_x f(x,y) & \partial_y^2 f(x,y) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Calcoliamo le seconde derivate parziali:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 f(x,y) &= \partial_x\big(-2x f(x,y)\big) = -2f(x,y)\, \partial_x(x) - 2x \partial_x f(x,y) \\ &= -2f(x,y) + 4x^2 f(x,y) \\ \partial_x^2 f(x,y) &= (4x^2 - 2) f(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_y^2 f(x,y) &= \partial_y\big(-2ay f(x,y)\big) = -2a f(x,y) \partial_y(y) - 2ay \partial_x f(x,y) \\ &= -2a f(x,y) + 4a^2 y^2 f(x,y) \\ \partial_x^2 f(x,y) &= (4a^2 y^2 - 2a) f(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_y \partial_x f(x,y) = \partial_x \partial_y f(x,y) &= \partial_x\big(-2ay f(x,y)\big) \\ &= -2ay \partial_x f(x,y) \\ \partial_x \partial_y f(x,y) &= 4axy f(x,y). \end{aligned}$$

Con queste possiamo scrivere la hessiana:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^2 - 2 & 4axy \\ 4axy & 4a^2 y^2 - 2a \end{pmatrix} f(x,y).$$

Ora possiamo scrivere il polinomio di Taylor.

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = f_0 &- 2f_0 \cdot [x_0(x - x_0) + a y_0 (y - y_0)] \\ &+ \frac{1}{2} f_0 \cdot \left[(4x_0^2 - 2)(x - x_0)^2 + 8a x_0 y_0 (x - x_0)(y - y_0) + (4a^2 y_0^2 - 2a)(y - y_0)^2 \right], \end{aligned}$$

dove di nuovo abbiamo definito $f_0 := f(x_0, y_0)$.

Esercizio 5.
Trovare l'equazione del piano tangente e calcolare il polinomio di Taylor fino al secondo grado della seguente funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Soluzione 5.
Notiamo che la funzione è smooth all'interno del disco di raggio 1. Notiamo anche che $f(x,y)^2 + x^2 + y^2 = 1$, quindi il grafico di questa funzione è la porzione $z > 0$ della sfera di raggio 1 centrata all'origine.

Piano Tangente Calcoliamo le derivate parziali di f. Per aiutarci con la regola della catena, definiamo

$$\begin{aligned} g(x,y) &:= 1 - x^2 - y^2, \\ s(t) &:= \sqrt{t} \end{aligned}$$

così abbiamo

$$f(x,y) = s \circ g(x,y).$$

Applicando la regola della catena per la derivata parziale otteniamo:

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y) &= s' \circ g(x,y) \cdot \partial_x g(x,y) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g(x,y)}} \cdot (-2x) \\ \partial_x f(x,y) &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\end{aligned}$$

e nella stessa maniera otteniamo

$$\partial_y f(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Quindi

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = \frac{-1}{f(x,y)}(x,y).$$

L'equazione del piano tangente al punto (x_0, y_0) è quindi:

$$z(x,y) = f(x_0,y_0) - \frac{x_0}{f(x_0,y_0)}(x-x_0) - \frac{y_0}{f(x_0,y_0)}(y-y_0).$$

Controlliamo che questa risposta ha senso. Se troviamo due vettori paralleli al piano tangente, possiamo trovare un vettore perpendicolare al piano tangente. Per il primo vettore prendiamo:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v_1} &= \big(x_0+1, y_0, z(x_0+1,y_0)\big) - \big(x_0,y_0,z(x_0,y_0)\big) \\ &= \big(1, 0, z(x_0+1,y_0) - z(x_0,y_0)\big) \\ \boldsymbol{v_1} &= \left(1, 0, -\frac{x_0}{f(x_0,y_0)}\right)\end{aligned}$$

il secondo, in maniera analoga:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v_2} &= \big(x_0, y_0+1, z(x_0,y_0+1)\big) - \big(x_0,y_0,z(x_0,y_0)\big) \\ \boldsymbol{v_2} &= \left(0, 1, -\frac{y_0}{f(x_0,y_0)}\right)\end{aligned}$$

e potete controllare che il vettore:

$$\boldsymbol{v_3} = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$$

è perpendicolare ad entrambi v_1 e v_2. Questo è bene, perché sappiamo che il grafico di f è un pezzo della sfera, quindi il piano tangente al punto $(x_0, y_0, z(x_0,y_0))$ dovrebbe essere perpendicolare al vettore dall'origine al quel punto.

Polinomio di Taylor Sopra abbiamo trovato le derivate parziali di f:

$$\partial_x f(x,y) = -\frac{x}{f(x,y)}, \qquad \partial_y f(x,y) = -\frac{y}{f(x,y)}.$$

Ora calcoliamo le derivate seconde. La più facile è

$$\begin{aligned}\partial_x\partial_y f(x,y) &= -y\,\partial_x\left(\frac{1}{f(x,y)}\right) \\ &= -y\left(\frac{-1}{f(x,y)^2}\right)\partial_x f(x,y) \\ \partial_y\partial_x f(x,y) &= -\frac{xy}{f(x,y)^3},\end{aligned}$$

dove per passare dalla prima alla seconda uguaglianza abbiamo usato la regola della catena. Questo ci dà due delle componenti di $D^2 f$, perché $\partial_x\partial_y = \partial_y\partial_x$. Ora siamo pronti per una un po' più difficile:

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 f(x,y) &= -\partial_x\left(\frac{x}{f(x,y)}\right) \\
&= -\frac{1}{f(x,y)}\,\partial_x x - x\partial_x\frac{1}{f(x,y)} \\
&= -\frac{1}{f(x,y)} - x\left(\frac{-1}{f(x,y)^2}\right)\partial_x f(x,y) \\
\partial_x^2 f(x,y) &= -\frac{1}{f(x,y)} - \frac{x^2}{f(x,y)^3},
\end{aligned}$$

Per passare dalla prima alla seconda uguaglianza abbiamo usato la regola di Liebniz per le derivate parziali, per passare dalla seconda alla terza abbiamo usato di nuovo la regola della catena. Possiamo semplificare l'espressione qui sopra usando $f(x,y)^2+x^2+y^2 = 1$. Riscriviamo

$$\partial_x^2 f(x,y) = -\frac{f(x,y)^2 + x^2}{f(x,y)^3} = -\frac{1-y^2}{f(x,y)^3}.$$

Per trovare l'ultimo componente, non dobbiamo fare molto lavoro. Notiamo che l'espressione di f tratta i due argomenti in maniera totalmente simmetrica $f(x,y) = f(y,x)$, ne deduciamo che il conto per trovare $\partial_y^2 f$ è identico al conto per trovare $\partial_y^2 f$, con l'unica differenza tipografica di scambiare $x \leftrightarrow y$. Quindi:

$$\partial_y^2 f(x,y) = -\frac{1-x^2}{f(x,y)^3}.$$

Possiamo finalmente scrivere la matrice hessiana:

$$D^2 f(x,y) = -\frac{1}{f(x,y)^3}\begin{pmatrix} 1-y^2 & xy \\ xy & 1-x^2 \end{pmatrix},$$

e il polinomio di Taylor intorno al punto (x_0, y_0):

$$\begin{aligned}
T^2(x,y) = f_0 &- \frac{1}{f_0}\left[x_0(x-x_0) + y_0(y-y_0)\right] \\
&- \frac{1}{2f_0^3}\left[(1-y^2)(x-x_0)^2 + 2x_0y_0(x-x_0)(y-y_0) + (1-x^2)(y-y_0)^2\right].
\end{aligned}$$