# Tutoraggio Analisi II

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Ingegneria Civile ed Industriale

Sapienza Università di Roma

Andrea Di Biagio*

**Settimana 7**

*Estremi Vincolati ed Integrali Doppi*

**Esercizio 1.**
Trovare il massimo e minimo assoluti della funzione

$$\begin{aligned} f : \mathrm{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto [x\cos\varphi + y\sin\varphi]^n \end{aligned}$$

nel disco $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ di raggio 2 centrato all'origine, assumendo che $\cos\varphi \neq 0 \neq \sin\varphi$.

**Soluzione 1.**
Siccome $f$ è differenziabile e $D_2$ è un insieme compatto di $\mathbb{R}^2$ il minimo e massimo assoluti di $f$ esistono e si trovano tra i punti critici di $f$ all'interno di $D_2$ o sul bordo del disco.

*Punti critici.* Per trovare i punti critici, calcoliamo il gradiente di $f$:

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= n\cos\varphi\,[x\cos\varphi + y\sin\varphi]^{n-1} \\ \partial_y f(x, y) &= n\sin\varphi\,[x\cos\varphi + y\sin\varphi]^{n-1} \end{aligned}$$

e risolviamo $\boldsymbol{\nabla} f(x, y) = \mathbf{0}$. Quindi i punti critici soddisfano

$$(x-1)\cos\varphi + y\sin\varphi = 0 \iff x = -y\tan\varphi.$$

Il valore di $f$ su questi punti è:

$$f(-y\tan\varphi, y) = 0.$$

*Estremi vincolati.* Ora cerchiamo il massimo ed il minimo di $f|_\Gamma$ dove $\Gamma$ è la circonferenza di raggio 2. Esprimiamo questo vincolo con l'equazione $g(x, y) = 4$, dove

$$g(x, y) := x^2 + y^2$$

ed usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Ossia, risolviamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = \lambda \partial_x g(x, y) \\ \partial_y f(x, y) = \lambda \partial_y g(x, y) \\ g(x, y) = 4 \end{cases}$$

cioè esplicitamente

$$\begin{cases} n\cos\varphi\,[x\cos\varphi + y\sin\varphi]^{n-1} = 2x\lambda \\ n\sin\varphi\,[x\cos\varphi + y\sin\varphi]^{n-1} = 2y\lambda \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

*andrea.dibiagio@uniroma1.it

Assumiamo per il momento che $\lambda x \neq 0$. Dividiamo la seconda equazione con la prima equazione, e otteniamo

$$\frac{y}{x} = \tan\varphi.$$

Se scriviamo,

$$x = 2\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta,$$

allora la terza equazione è soddisfatta e otteniamo:

$$\tan\theta = \tan\varphi \iff \theta = \varphi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^2.$$

Otteniamo quindi due soluzioni per il sistema:

$$(x_\pm, y_\pm) = \pm(2\cos\varphi, 2\sin\varphi),$$

per quali $f$ prende i valori

$$f_\pm := f(x_\pm, y_\pm) = (\pm 2\cos^2(\varphi) \pm 2\sin^2(\varphi))^n = (\pm 2)^n$$

Per il caso $\lambda x = 0$, allora le soluzioni soddisfano $x = -y\tan\varphi$ come prima, e quindi la funzione è uguale a 0. Quindi i tre candidati per massimo e minimo di $f|_\Gamma$ sono $(\pm 2)^n$ e 0. Se $n$ è pari, allora la funzione ha due punti dove assume il valore massimo $2^n$ e due punti dove assume il valore minimo 0. Mentre se $n$ è dispari, assume il valore massimo $2^n$ nel punto $(2\cos\varphi, 2\sin\varphi)$ e il valore minimo su $-2^n$ nel punto $-(2\cos\varphi, 2\sin\varphi)$.

*Minimo e Massimo di $f$* Distinguiamo due casi. Se $n$ è pari, allora il minimo della funzione è 0 ed è ottenuto sull'insieme $D_2 \cap \{(-y\tan\varphi, y) | y \in \mathbb{R}^2\}$, mentre il massimo è $2^n$ ottenuto sui due punti $\pm(2\cos\varphi, 2\sin\varphi)$. Mentre se $n$ è dispari, è $f(2\cos\varphi, 2\sin\varphi) = 2^n$ e il minimo è $f(-2\cos\varphi, -2\sin\varphi) = -2^n$.

**Esercizio 2.**
Disegnare il dominio

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 2, x^2 \leq y\right\}$$

e dimostrare che è un dominio semplice. In seguito calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_\Omega x^2 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

**Soluzione 2.**
Un insieme $\Omega$ è *semplice* rispetto all'asse $y$ se esiste un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e due funzioni $g_1, g_2 \in C([a, b])$ tali che $g_1 < g_2$ e

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\right\}.$$

La definizione di un insieme semplice rispetto all'asse $x$ è analoga.

*Graficamente.* Dimostriamo in maniera analitica che $\Omega$ è semplice rispetto all'asse $y$. La diseguaglianza $x^2 + y^2 \leq 2$ ci indica che $\Omega$ è contenuto nel disco $D_2$ di raggio 2 centrato nell'origine. La seconda diseguaglianza ci dice che i punti di $\Omega$ sono tutti più in alto della curva $y = x^2$ o proprio sulla curva stessa. Disegnando queste due regioni, vediamo che per un punto qualsiasi $(x, y) \in \omega$ abbiamo:

$$x^2 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2},$$

e questo è valido per tutti i valori di $x$ tra i punti di intersezione tra la curva $y = x^2$ e la circonferenza. L'intersezione di $y = x^2$ e la circonferenza avviene quando:

$$x^2 + x^4 = 2,$$

che per ispezione avviene quando $x = \pm 1$. Quindi $\Omega$ è un insieme semplice:

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right], x^2 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2} \right\}.$$

*Analiticamente.* Dimostriamo in maniera analitica che $\Omega$ è semplice rispetto all'asse $y$. Usando la prima diseguaglianza, otteniamo la doppia diseguaglianza

$$-\sqrt{2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}.$$

Quindi un punto $(x, y) \in \Omega$ soddisfa tre diseguaglianze:

$$\begin{cases} y \leq \sqrt{2 - x^2} \\ y \geq -\sqrt{2 - x^2} \\ y \geq x^2 \end{cases}$$

Nota che la l'ultima diseguaglianza implica la seconda, quindi ne dobbiamo risolvere solo due

$$\begin{cases} y \leq \sqrt{2 - x^2} \\ y \geq x^2 \end{cases}$$

Dobbiamo verificare anche per quali valori di $x$ questo sistema ammette delle soluzioni. Dobbiamo quindi vedere per quali valori di $x$ è vero che

$$x^2 \leq \sqrt{2 - x^2}.$$

Quest'ultima diseguaglianza implica

$$0 \geq x^4 + x^2 - 2.$$

Abbiamo già visto che il polinomio $p(x) = x^4 + x^2 - 2$ ha due radici $x = \pm 1$. Queste sono le sole due radici reali, siccome è facile verificare che $p(x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 2)$. Quindi possiamo riscrivere la diseguaglianza come:

$$0 \geq (x - 1)(x + 2)(x^2 + 2),$$

Siccome $(x^2 + 2)$ è sempre positivo, la diseguaglianza è soddisfatta tra le due radici del poliniomo $(x - 1)(x + 1)$, cioè per $x \in [-1, 1]$. Quindi troviamo lo stesso risultato di prima

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right], x^2 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2} \right\}.$$

*Integrale.* Siccome $\Omega$ è semplice lungo l'asse $y$ abbiamo

$$I = \iint_\Omega x^2 y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left( \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2 y \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Per l'integrale interna, $x$ è costante, quindi calcoliamo

$$\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2 y \, \mathrm{d}y = x^2 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} y \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} x^2 \left( 2 - x^2 - x^4 \right)$$

e quindi

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left( 2x^2 - x^4 - x^6 \right) = \int_{0}^{1} \left( 2x^2 - x^4 - x^6 \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{34}{105}.$$

**Esercizio 3.**
Disegnare il dominio

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \cosh(x) \leq y \leq \frac{5}{4} \right\}$$

e dimostrare che è un dominio semplice. In seguito calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_\Omega (\sinh(x) + y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

**Soluzione 3.**
*Dominio semplice* La descrizione del dominio è già nella forma $g_1(x) \geq y \leq g_2(x)$, ci rimane solo trovare l'intervallo per $x$, cioè i valori per i quali $\cosh(x) \leq 5/4$, ossia, per definizione:

$$e^x + e^{-x} \leq \frac{5}{2}.$$

Ponendo $X = e^x$, otteniamo la diseguaglianza

$$X^2 - \frac{5}{2}X + 1 \leq 0,$$

che ottiene per valori di $X$ tra le due radici del polinomio. Queste sono,

$$X_\pm = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25}{4} - 4} = 2,\ \frac{1}{2}$$

e quindi per $x \in [-\ln 2, \ln 2]$.

*Integrale.* Intanto notiamo che data la linearità dell'integrale possiamo scrivere $I = I_1 + I_2$ con

$$I_1 = \iint_\Omega \sinh(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$I_2 = \iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

e facciamoli uno alla volta.

$$I_1 = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \left( \sinh(x) \int_{\cosh x}^{5/4} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \sinh(x) \left( \frac{5}{4} - \cosh(x) \right) \mathrm{d}x = 0,$$

dove per l'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che l'integrante è una funzione dispari.

$$I_2 = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \left( \int_{\cosh x}^{5/4} y\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \left( \frac{25}{16} - \cosh^2 x \right) \mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} \left( \frac{25}{16} - \cosh^2 x \right) \mathrm{d}x.$$

Il primo termine da semplicemente $\frac{25}{16}\ln 2$ mentre il secondo termine è

$$\frac{1}{4}\int_{\ln 2}^0 \left(e^{2x} + e^{-2x} + 2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(1 - e^{2\ln 2} - 1 + e^{-2\ln 2}\right) - \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{15}{32} - \frac{1}{2}\ln 2,$$

quindi

$$I = \frac{17}{16}\ln 2 - \frac{7}{32}$$