Tutoraggio Analisi II

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Ingegneria Civile ed Industriale

Sapienza Università di Roma

Docente: Anna Chiara Lai

Tutor: Andrea Di Biagio*

Settimana 11

Teoremi della Divergenza e del Rotore

Esercizio 1.
Data la curva,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

e il campo vettoriale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (e^x + y^2, y^3 + x) \end{aligned}$$

calcolare $I = \int_\gamma \boldsymbol{\omega}$, dove $\boldsymbol{\omega}$ è la forma differenziale associata a $\boldsymbol{G}$.

Esercizio 2.
Data la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto 3 \exp(\cos 2x), \end{aligned}$$

Sia $\boldsymbol{\gamma}$ la curva

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \big(f(t) \cos t, f(t) \sin t\big) \end{aligned}$$

Calcolare la circuitazione lungo $\boldsymbol{\gamma}$ del campo vettoriale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right). \end{aligned}$$

Aiuto: Si consideri una superficie Σ con frontiera $\partial\Sigma$ disconnessa tale che $\boldsymbol{\gamma} \subset \partial\Sigma$ per avvalersi del teorema del rotore.

Esercizio 3.
Dato il campo vettoriale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \big(\ln\big(1 + y^2\big), \cos x \sin z, x^3 + y^3 + z^3\big), \end{aligned}$$

calcolare

$$I = \iint_\Sigma \langle \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{N} \rangle \mathrm{d}S,$$

*andrea.dibiagio@uniroma1.it

dove Σ è il cubo che ha come vertici i punti $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$, e $\boldsymbol{N}$ è il versore normale esterno a Σ.

Esercizio 4.
Sia Σ la parte di $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\}$ nella parte $x \geq 0$ dello spazio:

$$\Sigma := \left\{(x,y,z) \in S^2 \;\middle|\; x \geq 0\right\}.$$

Calcolare il flusso attraverso Σ del campo vettoriale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x+1,1,1). \end{aligned}$$