Tutoraggio Analisi II

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Ingegneria Civile ed Industriale
Sapienza Università di Roma

Docente: Anna Chiara Lai
Tutor: Andrea Di Biagio*

Settimana 9
Superfici ed Integrali di Superficie

Esercizio 1.
Sia

$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2=1\right\}.$$

la sfera di raggio 1 centrata all'origine e si consideri l'insieme:

$$C = \left\{(x,y,z) \in S^2 \;\middle|\; z \geq 0\right\}.$$

Dimostrare, che C è una superficie elementare. Trovare cioè un sottoinseme $D \subset \mathbb{R}^2$ interno di una curva di Jordan e una mappa $\boldsymbol{\sigma} : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ tale che $\boldsymbol{\sigma}|_D$ è iniettiva e $\boldsymbol{\sigma}(\bar{D}) = C$. La mappa $\boldsymbol{\sigma}$ è detta una *parametrizzazione* di C. Trovare il bordo di C.

Soluzione 1.
Parametrizzazione. Consideriamo il sottoinsieme

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u^2+v^2<1\right\}.$$

Questo è l'interno del disco di raggio 1 centrato all'origine del piano $\mathbb{R}^2$. Il suo bordo ∂D è il cerchio di raggio 1, che è una curva di Jordan. Infine abbiamo:

$$\bar{D} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u^2+v^2 \leq 1\right\}.$$

Consideriamo la mappa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \bar{D} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right) \end{aligned}$$

Per dimostrare che $\boldsymbol{\sigma}$ è una parametrizzazione di C dobbiamo dimostrare due cose: che $\boldsymbol{\sigma}$ è iniettiva quando è ristretta a D e che l'immagine $\boldsymbol{\sigma}(\bar{D})$ è C.

Cominciamo con dimostrare che $\boldsymbol{\sigma}(\bar{D}) \subset C$. Abbiamo

$$\forall (u,v) \in \bar{D}: \quad \|\boldsymbol{\sigma}(u,v)\|^2 = u^2+v^2+1-u^2-v^2 = 1,$$

quindi $\boldsymbol{\sigma}(u,v) \in S^2$. Ma abbiamo anche $\sqrt{1-u^2-v^2} \geq 0$ per definizione, quindi $\boldsymbol{\sigma}(u,v) \in C$ e $\boldsymbol{\sigma}(\bar{D}) \subset C$. Ora dimostriamo che $C \subset \boldsymbol{\sigma}(\bar{D})$, cioè che per ogni punto $(x,y,z) \in C$ esiste un punto $(u,v) \in \bar{D}$ tale che:

$$\left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right) = (x,y,z) \iff \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{1-u^2-v^2} \end{cases}$$

*andrea.dibiagio@uniroma1.it

Le prime due equazioni sono semplici da risolvere, ma dobbiamo ricordarci che $(u, v) \in \bar{D}$, quindi la soluzione esiste solo se $x^2 + y^2 \leq 1$. Questo è vero perché $(x, y, z) \in C$ e quindi

$$x^2 + y^2 = 1 - z^2 \leq 1.$$

La terza equazione è poi immediatamente soddisfatta perché $z \geq 0$ e quindi $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Questo conclude la dimostrazione che ogni punto in C ha una pre-immagine in $\bar{D}$. Abbiamo $C \subset \boldsymbol{\sigma}(\bar{D})$ e $\boldsymbol{\sigma}(\bar{D}) \subset C$ e quindi $\boldsymbol{\sigma}(\bar{D}) = C$.

Mentre dimostravamo che $C \subset \boldsymbol{\sigma}(\bar{D})$ abbiamo in effetti anche dimostrato che $\boldsymbol{\sigma}$ è iniettiva, perché c'è un unica soluzione al sistema di equazioni $\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (x, y, z)$. Quindi $\boldsymbol{\sigma}$ è una parametrizzazione di C.

Bordo. Il bordo di C è il sottoinsieme ∂C di C definito come l'insieme dei punti che non sono interni a C. Un punto $\boldsymbol{x} \in C$ è *interno* a C se esiste una parametrizzazione per la quale $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\sigma}(D)$, cioè se la sua pre-immagine nell'insieme aperto D. L'immagine di ∂D, cioè l'insieme dei punti $(x, y, 0) \in C$ è il bordo di C.

Un altro modo trovare il bordo sarebbe di dimostrare che la superficie è invertibile e quindi concludere che $\partial C = \boldsymbol{\sigma}(\partial D) = \{(x, y, z) \in C \mid z = 0\}$.

Esercizio 2.
Sia $D = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$. La mappa

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \bar{D} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \phi) &\longmapsto \left(\frac{2r \cos \phi}{1 + r^2}, \frac{2r \sin \phi}{1 + r^2}, \frac{r^2 - 1}{1 + r^2} \right) \end{aligned}$$

fornisce una parametrizzazione della sfera con un punto rimosso $\Sigma = S^2 \setminus \{\boldsymbol{N}\}$. Trovare il punto $\boldsymbol{N}$. Calcolare l'area della sfera usando questa parametrizzazione. Σ ha un bordo?

Soluzione 2.
Punto mancante. Il punto che manca è il "polo nord" $\boldsymbol{N} = (0, 0, 1)$. Questa parametrizzazione è nota come *proiezione stereografica*. Il punto (r, ϕ) è il punto del piano che giace sulla retta che connette $\boldsymbol{N}$ al punto $\boldsymbol{\sigma}(r, \phi)$.

Area. Per calcolare l'area, dobbiamo prima calcolare le derivate parziali della mappa $\boldsymbol{\sigma}$. Definiamo funzioni $x, y, z : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ tali che

$$\boldsymbol{\sigma}(r, \phi) = (x(r, \phi), y(r, \phi), z(r, \phi))$$

e facciamo una cosa alla volta. Cominciamo con le derivate rispetto a r:

$$\begin{aligned} \partial_r x(r, \phi) &= 2 \cos \phi \frac{1 + r^2 - 2r^2}{(1 + r^2)^2} = 2 \cos \phi \frac{1 - r^2}{(1 + r)^2} \\ \partial_r y(r, \phi) &= 2 \sin \phi \frac{1 + r^2 - 2r^2}{(1 + r^2)^2} = 2 \sin \phi \frac{1 - r^2}{(1 + r)^2} \\ \partial_r z(r, \phi) &= \frac{2r(1 + r^2) - 2r(1 - r^2)}{(1 + r^2)^2} = \frac{4r}{(1 + r^2)^2} \end{aligned}$$

quindi

$$\partial_r \boldsymbol{\sigma}(r, \phi) = \frac{2}{(1 + r^2)^2} \big((1 - r^2) \cos \phi, (1 - r^2) \sin \phi, 2r \big).$$

Le derivate rispetto a ϕ sono molto più facili, le facciamo d'un balzo:

$$\partial_\phi \boldsymbol{\sigma}(r, \phi) = \big(-y(r, \phi), x(r, \phi), 0 \big).$$

Possiamo quindi calcolare il vettore tangente,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n}(r,\phi) &:= \partial_r\boldsymbol{\sigma}(r,\phi)\wedge\partial_\phi\boldsymbol{\sigma}(r,\phi) \\
&= \frac{2}{(1+r^2)^2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ (1-r^2)\cos\phi & (1-r^2)\sin\phi & 2r \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} \\
\boldsymbol{n}(r,\phi) &= \frac{2}{(1+r^2)^2}\big(-2rx\ ,\ -2ry\ ,\ (1-r^2)(x\cos\phi+y\sin\phi)\big),
\end{aligned}$$

dove per chiarezza tipografica abbiamo lasciato momentaneamente impliciti gli argomenti di x e y. Possiamo semplificare l'ultimo componente usando la definizione di x, y e z:

$$(1-r^2)(x\cos\phi+y\sin\phi) = (1-r^2)\left(\frac{2r\cos^2\phi}{1+r^2}+\frac{2r\sin^2\phi}{1+r^2}\right) = (1-r^2)\frac{2r}{(1+r^2)} = -2rz.$$

Abbiamo quindi scoperto che il vettore normale è proporzionale alla posizione:

$$\boldsymbol{n}(r,\phi) = -\frac{4r}{(1+r^2)^2}\boldsymbol{\sigma}(r,\phi).$$

L'area della superficie è definita come l'integrale doppio:

$$A(\Sigma) := \iint_D \|\boldsymbol{n}(r,\phi)\|\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$$

Abbiamo già visto che la norma di $\boldsymbol{\sigma}$ è 1, quindi possiamo direttamente calcolare.

$$\begin{aligned}
A(\Sigma) &= \int_0^\infty\left(\int_0^{2\pi}\frac{4r}{(1+r^2)^2}\mathrm{d}\phi\right)\mathrm{d}r \\
&= 8\pi\int_0^\infty\frac{r}{(1+r^2)^2}\mathrm{d}r \\
&= 4\pi\int_1^\infty\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u \\
A(\Sigma) &= 4\pi.
\end{aligned}$$

Bordo. Σ non ha bordo. I punti di bordo potrebbero essere le immagini del bordo di D, cioè le immagini delle curve $t\mapsto\boldsymbol{\sigma}(0,t)$, $t\mapsto\boldsymbol{\sigma}(t,0)$ e $t\mapsto\boldsymbol{\sigma}(t,2\pi)$. Intanto vediamo che

$$\boldsymbol{\sigma}(0,t) = (0,0,-1) = \boldsymbol{S},$$

il "polo sud", mentre

$$\boldsymbol{\sigma}(t,0) = \boldsymbol{\sigma}(t,2\pi) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, 0, \frac{t^2-1}{1+t^2}\right).$$

Pensandoci un po', si riconosce che

$$\{\boldsymbol{\sigma}(t,0)\mid t\in[0,\infty)\} = \{(\sin\alpha,0,\cos\alpha)\mid\alpha\in[0,2\pi)\} = \{(x,y,z)\in\Sigma\mid x\geq 0, y=0\} =: L$$

Graficamente, capiamo che sia $\boldsymbol{S}$ che i punti di L si trovano all'interno di Σ. Per dimostrarlo, dovremmo trovare un'altra parametrizzazione in cui le pre-immagini di $\boldsymbol{S}$ e L si trovano all'interno del dominio. Per esempio, per la parametrizzazione

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} : \bar{D} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(r,\phi) &\longmapsto \left(\frac{2r\sin\phi}{1+r^2}, \frac{2r\cos\phi}{1+r^2}, \frac{1-r^2}{1+r^2}\right)
\end{aligned}$$

la pre-immagine di $L \setminus \{\boldsymbol{N}\}$ è all'interno di D. Mentre la parametrizzazione

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\tilde{D}} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto \left(u^2, v^2, -\sqrt{1-u^2-v^2}\right), \end{aligned}$$

dove $\tilde{D} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 \leq 1\}$, copre la parte di Σ per $z \leq 1$, e $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}(\boldsymbol{S}) = \{(0,0)\}$ è nell'interno di $\tilde{D}$.

`NB:` Esiste una distinzione tra il concetto di *bordo di una superficie in* $\mathbb{R}^3$ e la *frontiera di un sotto-insieme di* $\mathbb{R}^3$. Il fatto che entrambi sono spesso indicati anteponendo il simbolo ∂ al nome della superficie può creare confusione. In questa domanda abbiamo dimostrato che Σ, vista come superficie in $\mathbb{R}^3$, non ha bordo. È facile dimostrare invece che Σ, intesa come sotto-insieme di $\mathbb{R}^3$, ha come frontiera l'intera sfera S^2. Infatti, ogni intorno sferico centrato in un punto in S^2 contiene sia punti in Σ sia punti nel suo complemento $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$.

Esercizio 3.
Sia $R = (1,2) \times (0, 2\pi)$ e sia Σ la superficie parametrizzata da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \bar{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta) &\longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, r\cos\theta) \end{aligned}$$

Dimostrare che Σ è una superficie elementare e trovarne il bordo. Calcolare l'area $A(\Sigma)$ di Σ, e poi calcolare l'integrale:

$$I = \iint_\Sigma f \mathrm{d}S$$

della funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Soluzione 3.
Elementare. Per dimostrare che Σ è una superficie elementare è sufficiente dimostrare che $\boldsymbol{\sigma}|_R$ è iniettiva. Infatti, $\Sigma = \boldsymbol{\sigma}(\bar{R})$ per definizione. Per dimostrare che $\boldsymbol{\sigma}|_R$ è iniettiva basta notare che:

$$(r\cos\theta, r\sin\theta) = (r'\cos\theta', r'\sin\theta') \implies \theta = \theta' + 2n\pi$$

e l'ultima equazione ha l'unica soluzione $\theta = \theta'$ in R.

Bordo. Il bordo $\partial\Sigma$ è composto dalle due curve

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}^1 : [0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \boldsymbol{\sigma}(1,t) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}^2 : [0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \boldsymbol{\sigma}(2,t) \end{aligned}$$

Invece, l'insieme

$$\{\boldsymbol{\sigma}(r,0) \mid 1 < r < 2\} = \{\boldsymbol{\sigma}(r,2\pi) \mid 1 < r < 2\}$$

si trova all'interno di Σ. Per dimostrarlo si deve considerare un'altra parametrizzazione.

Area. Per calcolare l'area ci servirà il vettore normale. Quindi calcoliamolo. Prima le derivate parziali:

$$\begin{aligned} \partial_r\boldsymbol{\sigma}(r,\theta) &= (\cos\theta, \sin\theta, \cos\theta) \\ \partial_\theta\boldsymbol{\sigma}(r,\theta) &= (-r\sin\theta, r\cos\theta, -r\sin\theta) \end{aligned}$$

e poi le mettiamo insieme per il vettore normale:

$$\boldsymbol{n}(r,\theta) := \partial_r\boldsymbol{\sigma}(r,\theta) \wedge \partial_\theta\boldsymbol{\sigma}(r,\theta) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} = (-r, 0, r)$$

Ora possiamo calcolare l'area di Σ:

$$A(\Sigma) := \iint_{\bar{R}} \|\boldsymbol{n}(r,\theta)\| \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{2} r \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r = 2\pi\sqrt{2} \int_1^2 r \mathrm{d}r = 3\pi\sqrt{2}.$$

Integrale di f. Per definizione:

$$I = \iint_{\bar{R}} f(\boldsymbol{\sigma}(r,\theta)) \|\boldsymbol{n}(r,\theta)\| \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{2} r^2 \cos\theta \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r$$

e quindi $I = 0$ perché $\int_0^{2\pi} \cos\theta \mathrm{d}\theta = 0$.

Esercizio 4.

Sia $\tilde{R} = (1,2) \times (0, 4\pi)$ e sia $\tilde{\Sigma}$ la superficie parametrizzata da

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\tilde{R}} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta) &\longmapsto \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

Come mai $\tilde{\Sigma}$ non è una superficie elementare?

Soluzione 4.

$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ non è iniettiva in $\tilde{R}$. Infatti

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(r, 3\pi) &= \left(r\cos 3\pi, r\sin 3\pi, \sqrt{r}\cos\frac{3\pi}{2} \right) = (-r, r, 0) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(r, \pi) &= \left(r\cos\pi, r\sin\pi, \sqrt{r}\cos\frac{\pi}{2} \right) = (-r, r, 0) \end{aligned}$$

Questa auto-intersezione crea problemi nel definire certi concetti che abbiamo usato fino ad ora. Per esempio, questa superficie non ha un piano tangente nel punto $(-r, r, 0)$. Quale si dovrebbe scegliere? $\boldsymbol{n}(r,\pi)$ o $\boldsymbol{n}(r, 3\pi)$? Però sorprendentemente, se uno calcola l'area usando l'espressione formale, il numero esce senza problemi. Esiste un'intera branca della geometria, la geometria differenziale, che si occupa delle proprietà intrinseche delle superfici, anche quelle superfici che non siedono bene in $\mathbb{R}^3$. La geometria differenziale ha diverse applicazioni, tra le quali lo studio dei gruppi di simmetrie, la formulazione della relatività generale e il modello standard della fisica delle particelle.