Tutoraggio Analisi II

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Ingegneria Civile ed Industriale
Sapienza Università di Roma

Andrea Di Biagio*

Settimana 2
Continuità di funzioni in due variabili

Studiare la continuità in $(0,0)$ delle seguenti funzioni.

Esercizio 1.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+6y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soluzione 1.
Guardiamo i valori su una retta:

$$f(x,ax) = \frac{x^3+6a^3x^3}{(x^2+a^2x^2)} = \frac{(1+6a^3)}{(1+a^2)}x$$

e quindi chiaramente per ogni $a < \infty$ abbiamo $\lim_{x\to 0} f(x,ax) = 0$. Però perché la funzione sia continua, dobbiamo avere una convergenza omogenea. Guardiamo quindi in coordinate polari:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\cos^3\theta + 6r^3\sin^3\theta}{r^2} = r\left(\cos^3\theta + 6\sin^3\theta\right).$$

Quanto è distante da $(0,0)$?

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = |r| \cdot \left|\cos^3\theta + 6\sin^3\theta\right| \leq r \cdot \left(\left|\cos^3\theta\right| + 6\left|\sin^3\theta\right|\right) \leq 7r.$$

Abbiamo quindi per tutti i valori di θ:

$$0 \leq |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq 7r,$$

da cui il risultato segue.

Esercizio 2.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

*andrea.dibiagio@uniroma1.it

Soluzione 2.
Valori su retta:

$$f(ay,y) = \frac{\ln(1+ay^2)}{\sqrt{1+a^2}|y|}$$

Sia il numeratore che il denominatore tendono a 0 quando $y \to 0$. Per trovare il limite possiamo usare due metodi. Prima lo sviluppo di Taylor. Scriviamo:

$$\ln\bigl(1+ay^2\bigr) = ay^2 + o(y^2)$$

e inserire questo in $f(ay,y)$:

$$f(ay,y) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}|y| + o(y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Altrimenti possiamo usare la regola di de l'Hospital. Abbiamo

$$\frac{d}{dy}\ln\bigl(1+ay^2\bigr) = \frac{2ay}{1+ay^2}$$

e quindi

$$\lim_{y\to 0} f(ay,y) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \frac{2ay}{1+ay^2} = 0.$$

L'esistenza di questo limite dimostra la continuità della restrizione di questa funzione su ogni retta $x = ay$. Per vedere se f è continua dobbiamo studiare se la convergenza è omogenea in θ quando $r \to 0$. In coordinate polari,

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\ln(1+r^2\cos\theta\sin\theta)}{r}.$$

Possiamo usare la monotonicità del logaritmo per scrivere per trovare un maggiorante e minorante di f. Si noti che

$$1 - r^2 \le 1 + r^2\cos\theta\sin\theta \le 1 + r^2$$

e quindi, per $r < 1$ possiamo applicare ln in tutti i termini della disuguaglianza e poi dividere per r per ottenere:

$$\frac{\ln(1-r^2)}{r} \le f(r\cos\theta, r\sin\theta) \le \frac{\ln(1+r^2)}{r},$$

e quindi in particolare:

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \le \frac{\ln(1+r^2)}{r}.$$

È poi facile usare l'espansione di Taylor o la regola di de l'Hospital per dimostrare che entrambi che la funzione di destra converge a 0. Abbiamo quindi dimostrato che $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ converge a 0 in maniera omogenea in θ, e quindi f è continua all'origine.

Esercizio 3.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Soluzione 3.
Questo esempio ci farà vedere perché la continuità di f ristretta su rette non è sufficiente per concludere che f è continua nel suo dominio. Infatti abbiamo

$$f(x, ax) = \frac{1+a^2}{a} x \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

per tutti gli $a \neq 0$, mentre per $a = 0$ abbiamo per $f(x,0) = 0$ per definizione. Quindi f è continua quando è ristretta su una qualunque retta che passa per l'origine. Lo si vede anche in coordinate polari:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r}{\sin\theta}.$$

Chiaramente, per ogni valore di θ, abbiamo $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$. Ma si noti che la convergenza non è uniforme in θ.

Ricordate la definizione di continuità: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\delta > r$ implica $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| < \delta$. Ma qui abbiamo che per ogni valore di r, il valore di f può essere arbitrariamente largo:

$$\forall r > 0 : \quad \lim_{\theta\to 0^+} f = +\infty.$$

Quindi dato un $\epsilon > 0$, per ogni $\delta > 0$ e per ogni $r < \delta$, si può trovare un valore di θ tale che $f(r\cos\theta, r\sin\theta) > \epsilon$. Quindi la funzione non è continua all'origine.

Esercizio 4.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soluzione 4.
Il limite dipende da come si approccia l'origine:

$$f(x, ax) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+a^2}|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} \pm \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

La funzione quindi non è continua.

Esercizio 5.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soluzione 5.
Questa volta sulle rette va bene:

$$f(x, ax) = \frac{\sin ax^2}{\sqrt{1+a^2}|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Quindi andiamo avanti e vediamo in coordinate polari:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\sin\left(r^2\cos\theta\sin\theta\right)}{r}.$$

Qui possiamo usare il fatto che sin è monotona crescente in $[-\pi/2, \pi/2]$ e fare lo stesso ragionamento che all'esercizio 2 per ottenere

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq \left|\frac{\sin r^2}{r}\right|,$$

Si usa poi o Taylor o de l'Hospital di nuovo per ottenere che f tende a 0 in maniera omogenea in θ quando $r \to 0$. Si conclude quindi che f è continua.