Tutoraggio Analisi II

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Ingegneria Civile ed Industriale

Sapienza Università di Roma

Docente: Anna Chiara Lai

Tutor: Andrea Di Biagio*

Settimana 11

Teoremi della Divergenza e del Rotore

Esercizio 1.

Data la curva,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

e il campo vettoriale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (e^x + y^2, y^3 + x) \end{aligned}$$

calcolare $I = \int_\gamma \boldsymbol{\omega}$, dove $\boldsymbol{\omega}$ è la forma differenziale associata a $\boldsymbol{G}$.

Soluzione 1.

Usando le definizioni dell'integrale curvilineo di seconda e di prima specie:

$$\int_\gamma \boldsymbol{\omega} := \int_0^{2\pi} \langle \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\gamma}(t)), \boldsymbol{\gamma}'(t)\rangle \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \langle \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\gamma}(t)), \boldsymbol{T}(t)\rangle \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| \mathrm{d}t =: \int_\gamma \langle \boldsymbol{G}, \boldsymbol{T}\rangle \mathrm{d}s,$$

dove per la seconda uguaglianza abbiamo definito $\boldsymbol{T}(t) = \boldsymbol{\gamma}'(t)/\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|$, il versore tangente alla curva $\boldsymbol{\gamma}$. Abbiamo scritto I come la circuitazione di un campo vettoriale. Possiamo quindi usare il teorema del rotore nel piano. Notiamo che la curva $\boldsymbol{\gamma}$ è la frontiera di D, il disco di raggio 1 centrato all'origine, orientata in senso positivo. Quindi:

$$\int_\gamma \langle \boldsymbol{G}, \boldsymbol{T}\rangle \mathrm{d}s = \iint_D \langle \mathbf{rot}\ \boldsymbol{G}(x, y), \boldsymbol{e}_3\rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Calcoliamo il componente rilevante del rotore di $\boldsymbol{G}$:

$$\langle \mathbf{rot}\ G(x, y), \boldsymbol{e}_3\rangle = \partial_x G_2(x, y) - \partial_y G_1(x, y) = 1 - 2y,$$

e quindi

$$I = \iint_D (1 - 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi.$$

Il risultato segue dal fatto che $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = A(D) = \pi$, mentre:

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sin\theta\ r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 0.$$

*andrea.dibiagio@uniroma1.it

Esercizio 2.
Data la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto 3\exp(\cos 2x), \end{aligned}$$

Sia $\boldsymbol{\gamma}$ la curva

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \big(f(t)\cos t, f(t)\sin t\big) \end{aligned}$$

Calcolare la circuitazione lungo $\boldsymbol{\gamma}$ del campo vettoriale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right). \end{aligned}$$

Aiuto: Si consideri una superficie Σ con frontiera $\partial\Sigma$ disconnessa tale che $\boldsymbol{\gamma} \subset \partial\Sigma$ per avvalersi del teorema del rotore.

Soluzione 2.
Notiamo che

$$\begin{aligned} \partial_x v_2(x, y) &= \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \partial_x v_1(x, y) &= \frac{-x^2-y^2+2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\langle \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_3 \rangle(x, y) := \partial_x v_2(x, y) - \partial_x v_1(x, y) = 0.$$

Quindi, secondo il teorema del rotore nel piano:

$$\int_{\partial\Sigma} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{T} \rangle \mathrm{d}s = \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_3 \rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

per qualsiasi superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Notiamo che non possiamo prendere come superficie Σ la parte del piano interna alla curva $\boldsymbol{\gamma}$, perché questa include l'origine, e $\boldsymbol{v}$ non è definito nell'origine. Prendiamo però Σ come la parte del piano interna a $\boldsymbol{\gamma}$ e esterna a S^1, il cerchio di raggio 1 centrato all'origine:

$$\Sigma := \big\{ (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 1 \le r \le f(\theta) \big\}.$$

Abbiamo anche che $\partial\Sigma$ ha due componenti: $\boldsymbol{\gamma}$ ed il cerchio S^1 orientato negativamente. Parametrizziamo quest'ultimo con la curva

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

Ne segue che:

$$\int_{\partial\Sigma} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{T} \rangle \mathrm{d}s = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{T} \rangle \mathrm{d}s - \int_{\boldsymbol{\sigma}} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{T} \rangle \mathrm{d}s,$$

dove il segno $-$ viene dall'orientazione della curva interna. Ricordandoci che il rotore di $\boldsymbol{v}$ è nullo, abbiamo:

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{T} \rangle \mathrm{d}s = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{T} \rangle \mathrm{d}s.$$

L'integrale a sinistra è la circuitazione di $\boldsymbol{v}$ lungo $\boldsymbol{\gamma}$, ma il secondo integrale è molto più facile da calcolare. Ricordiamo dalle definizioni che

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{T} \rangle \mathrm{d}s := \int_0^{2\pi} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\sigma}(t)), \boldsymbol{\sigma}'(t) \rangle \mathrm{d}t.$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\sigma}(t)) =& \boldsymbol{v}(\cos t, \sin t) = (\sin t, -\cos t), \\ \boldsymbol{\sigma}'(t) =& (-\sin t, \cos t) \end{aligned}$$

$$\implies \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\sigma}(t)), \boldsymbol{\sigma}'(t) \rangle = -1$$

E otteniamo quindi:

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{T} \rangle \mathrm{d}s = -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = -2\pi.$$

Esercizio 3.
Dato il campo vettoriale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \big(\ln\big(1 + y^2\big), \cos x \sin z, x^3 + y^3 + z^3 \big), \end{aligned}$$

calcolare

$$I = \iint_\Sigma \langle \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{N} \rangle \mathrm{d}S,$$

dove Σ è il cubo che ha come vertici i punti $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$, e $\boldsymbol{N}$ è il versore normale esterno a Σ.

Soluzione 3.
Per il teorema del rotore nello spazio:

$$\iint_\Sigma \langle \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{N} \rangle \mathrm{d}S = \int_{\partial\Sigma} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{T} \rangle ds$$

ma siccome Σ non ha bordo, $I = 0$.

Esercizio 4.
Sia Σ la parte di $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2\}$ nella parte $x \geq 0$ dello spazio:

$$\Sigma := \left\{ (x, y, z) \in S^2 \;\middle|\; x \geq 0 \right\}.$$

Calcolare il flusso attraverso Σ del campo vettoriale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Soluzione 4.
Non sarebbe troppo difficile calcolare il flusso direttamente valutando direttamente

$$I = \iint_\Sigma \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{N} \rangle \mathrm{d}S,$$

ma è più facile usare il teorema della divergenza nello spazio in una maniera molto simile a come abbiamo fatto un paio di esercizi fa. Notiamo che Σ è una delle componenti della frontera $\partial\Omega$ del volume:

$$\Omega := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0 \right\}.$$

L'altra componente è il disco di raggio 1 nel piano $x = 0$ centrato all'origine:

$$D := \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x > 0 \right\}.$$

Secondo il teorema della divergenza, abbiamo:

$$\iint_\Omega \textbf{div } \boldsymbol{v}(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{N} \rangle \mathrm{d}S + \iint_D \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{N} \rangle \mathrm{d}S.$$

e quindi

$$I = \iint_\Omega \textbf{div } \boldsymbol{v}(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_D \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{N} \rangle \mathrm{d}S.$$

Calcoliamo questi due integrali uno alla volta. Per il primo, notiamo che la divergenza è costante

$$\textbf{div } \boldsymbol{v}(x, y, z) := \partial_x v_1(x, y, z) + \partial_y v_2(x, y, z) + \partial_z v_3(x, y, z) = 1.$$

Dunque Il primo integrale è semplicemente il volume di Ω:

$$\iint_\Omega \textbf{div } \boldsymbol{v}(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =: V(\Omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Per il secondo integrale, possiamo parametrizzare D con la mappa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : [0, 1] \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta) &\longmapsto (0, r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

per la quale il versore normale a Σ esterno a Ω è $\boldsymbol{N}(r, \theta) = (-1, 0, 0)$, e abbiamo

$$\iint_D \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{N} \rangle \mathrm{d}S := \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\sigma}(r, \theta)), (-1, 0, 0) \rangle r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = -\pi.$$

E in conclusione,

$$I = \frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3}.$$