Tutoraggio Analisi II

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Ingegneria Civile ed Industriale
Sapienza Università di Roma

Andrea Di Biagio*

Settimana 4
Estremi liberi di funzioni a valori scalari

Esercizio 1.
Trovare e caratterizzare i punti critici della funzione:

$$f(x,y) = e^{-y^2}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right).$$

Soluzione 1.
I punti critici sono i punti in cui il gradiente della funzione diventa nullo. Calcoliamo quindi le derivate parziali:

$$\partial_x f(x,y) = \partial_x\left(e^{-y^2}\right)\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) + e^{-y^2}\partial_x\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) = e^{-y^2}(1-x^2)$$
$$\partial_y f(x,y) = \partial_y\left(e^{-y^2}\right)\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) + e^{-y^2}\partial_y\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) = -2ye^{-y^2}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)$$

La derivata $\partial_x f$ è nulla se e solo se $x = \pm 1$. Poi abbiamo

$$\partial_y f(\pm 1, y) = \mp\frac{3}{4}ye^{-y^2} = 0 \iff y = 0.$$

Quindi abbiamo due punti critici $\boldsymbol{x}_- = (-1,0)$ e $\boldsymbol{x}_+ = (1,0)$ e

$$f(-1,0) = -\frac{2}{3}, \qquad f(1,0) = \frac{2}{3}.$$

Quindi $\boldsymbol{x}_-$ e $\boldsymbol{x}_+$ sono i candidati estremi locali della funzione.
Calcoliamo le derivate parziali di secondo ordine:

$$\partial_x^2 f(x,y) = \partial_x\left(e^{-y^2}\right)\left(1-x^2\right) + e^{-y^2}\partial_x\left(1-x^2\right) = -2xe^{-y^2}$$

$$\partial_y\partial_x f(x,y) = \partial_y\left(e^{-y^2}\right)\left(1-x^2\right) + e^{-y^2}\partial_y\left(1-x^2\right) = -2ye^{-y^2}\left(1-x^2\right)$$

$$\begin{aligned}\partial_y^2 f(x,y) &= -2\partial_y\left(ye^{-y^2}\right)\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) - 2e^{-y^2}\partial_y\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\\ &= -2\left(e^{-y^2} - 2y^2e^{-y^2}\right)\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\\ \partial_y^2 f(x,y) &= e^{-y^2}(4y^2-2)\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\end{aligned}$$

*andrea.dibiagio@uniroma1.it

e scriviamo quindi la matrice hessiana

$$D^2 f(x,y) = e^{-y^2} \begin{pmatrix} -2x & 2y\left(x^2-1\right) \\ 2y\left(x^2-1\right) & \left(4y^2-2\right)\left(x-\frac{1}{3}x^3\right) \end{pmatrix}.$$

Studiamo un punto critico alla volta, cominciando con $\boldsymbol{x}_-$.

$$D^2 f(-1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è positivo, e gli autovalori sono positivi e quindi $\boldsymbol{x}_-$ è un minimo. Mentre a $\boldsymbol{x}_+$,

$$D^2 f(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di nuovo positivo, e gli autovalori sono negativi e quindi questo è un massimo .

Esercizio 2.
Trovare e caratterizzare i punti critici della funzione:

$$f(x,y) = x^3 + y - e^y.$$

Soluzione 2.
I punti critici sono i punti in cui il gradiente della funzione diventa nullo. Calcoliamo quindi le derivate parziali.

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= \partial_x(x^3) + \partial_x(y-e^y) = 3x^2 \\ \partial_y f(x,y) &= \partial_y(x^3) + \partial_y(y-e^y) = 1-e^y \end{aligned}$$

il gradiente è quindi

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = (3x^2, 1-e^y).$$

Vediamo che il solo punto critico di f è l'origine. Sapere se è un minimo, un massimo o un punto di sella useremo l'hessiana. Per trovarla, calcoliamo le derivate parziali di secondo ordine:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 f(x,y) &= \partial_x(3x^2) = 6x \\ \partial_y^2 f(x,y) &= \partial_y(1-e^y) = -e^y \\ \partial_x\partial_y f(x,y) = \partial_y\partial_x f(x,y) &= \partial_y(6x) = 0 \end{aligned}$$

e l'hessiana è quindi

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -e^y \end{pmatrix}.$$

Nell'unico punto critico, questa è:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e questa purtroppo ha determinante nullo, il che significa che non possiamo usare l'hessiana per concludere sulla natura di questo punto nullo.

Dobbiamo studiare la concavità o convessità della funzione al"origine. Vi ricordo che una funzione f è convessa intorno ad un punto $\boldsymbol{x}$ se esiste un intorno U di questo punto tale che, per ogni $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in U$ e ogni $t \in [0,1]$ abbiamo

$$t f(\boldsymbol{x_1}) + (1-t) f(\boldsymbol{x_2}) \geq f\big(t\boldsymbol{x_1} + (1-t)\boldsymbol{x_2}\big), \tag{1}$$

e f è concava se la disuguaglianza è nell'altro senso.

Spesso è più facile trovare contresempi che dimostrare che una cosa è vera. Questo è uno di questi casi. Dimostreremo che f non è ne convessa ne concava. Ogni intorno dell'origine contiene un piccolo segmento dell'asse x. Sia U l'intorno sferico di raggio r centrato all'origine. Abbiamo $\{(x,0)| -r < x < r\} \in U$. I valori di f sui punti di questo insieme sono:

$$f(x,0) = x^3 - 1.$$

Presa come una funzione di x, questa funzione non è ne concava ne convessa sull'intervallo $[-r,r]$. Per dimostrarlo basta dimostrare che l'ineguaglianza non regge per alcuni punti sula retta $y=0$. Prendiamo due punti $(-a,0)$ e $(a,0)$, dove $0 < a < r$ e calcoliamo i due lati della diseguaglianza (1):

$$\begin{aligned} g(t) &:= tf(a,0) + (1-t)f(-a,0) \\ &= t\left(a^3 - 1\right) + (1-t)\left((-a)^3 - 1\right) \\ g(t) &= (2t-1)a^3 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(t) &:= f\big(ta + (1-t)(-a), 0\big) \\ &= f\big((2t-1)a, 0\big) \\ h(t) &= (2t-1)^3 a^3 + 1 \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{4}\right) &= -\frac{1}{2}a + 1 < h\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}a + 1 \\ g\left(\frac{3}{4}\right) &= \frac{1}{2}a + 1 > h\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8}a + 1 \end{aligned}$$

e quindi (1) non regge per alcuni punti di U e alcuni valori di t. Quindi f non è ne concava ne convessa in nessun intorno U dell'origine.

Esercizio 3.

Trovare gli estremi della funzione

$$f(x,y) = y\cos x$$

sull'insieme compatto $A = \{(x,y)|x \in [0,2\pi], y \in [-1,1]\}$.

Soluzione 3.

Cominciamo con studiare i punti critici della funzione all'interno di A. Calcoliamo le derivate parziali:

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= \partial_x(y)\cos x + y\partial_x \cos x \ = -y\sin x \\ \partial_y f(x,y) &= \partial_y(y)\cos x + y\partial_y \cos x \ = \cos x \end{aligned}$$

quindi il gradiente è

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = (-y\sin x, \cos x).$$

Troviamone i punti critici in A. Vediamo che il secondo componente è 0 solo se $x = \pi/2 + n\pi$, per $n \in \mathbb{Z}$. I soli due casi all'interno di A sono $x = \pi/2$ e $x = 3\pi/2$. In questi due casi, il primo componente è 0 solo se $y = 0$. Quindi i due punti di f all'interno di A sono $\boldsymbol{x_1} = (\pi/2, 0)$ e $\boldsymbol{x_2} = (3\pi/2, 0)$.

Per vedere se sono dei minimi o massimi, calcoliamo la derivate parziali di secondo ordine.

$$\begin{aligned} \partial_x^2 f(x,y) &= \partial_x(-y)\sin x + -y\partial_x \sin x \ = -y\cos x \\ \partial_y f(x,y) &= \partial_y \cos x \ = 0 \\ \partial_x\partial_y f(x,y) &= \partial_x \cos x = -\sin x, \end{aligned}$$

e quindi scriviamo l'hessiana:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -y\cos x & -\sin x \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix}.$$

Vediamo che il determinante dell'hessiana,

$$\det D^2 f(x,y) = -\sin^2 x$$

quindi nessun punto critico di questa funzione può essere un minimo o un massimo. Per i punti critici all'interno di A abbiamo

$$\sin^2\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{3\pi}{2} = 1$$

e quindi $\det D^2 f(\boldsymbol{x_1}) = \det D^2 f(\boldsymbol{x_2}) = -1$. I due punti critici $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ sono due punti sella.

Ora guardiamo sul bordo di A Questo è composto di 4 segmenti di retta:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(0,y) \mid x \in [-1,1]\} \\ S_2 &= \{(x,-1) \mid x \in [0,2\pi]\} \\ S_3 &= \{(2\pi,y) \mid y \in [-1,1]\} \\ S_4 &= \{(x,1) \mid x \in [0,2\pi]\} \end{aligned}$$

Studiamo i valori di f su questo insieme. Cominciamo con S_1:

$$f(0,y) = y$$

quindi sono il minimo e massimo su S_1 sono $f(0,-1) = -1$ e $f(0,1) = 1$. Siccome

$$f(2\pi,y) = f(0,y),$$

otteniamo immediatamente che il minimo e massimo su S_3 sono $f(2\pi,-1) = -1$ e $f(2\pi,1) = 1$. Invece sul segmento S_2 abbiamo

$$f(x,-1) = -\cos(x)$$

e quindi abbiamo due minimi $f(0,-1) = f(2\pi,-1) = -1$ ed un massimo $f(\pi,-1) = 1$. Siccome

$$f(x,-1) = -f(x,1)$$

abbiamo due massimi ed un minimo su S_4: $f(0,1) = f(2\pi,1) = 1$ e $f(\pi,1) = 1$.

Ricapitolando, f ha due punti di inflessione all'interno di A con

$$f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = f\left(\frac{3\pi}{2},0\right) = 0,$$

tre minimi sul bordo di A:

$$f(\pi,1) = f(0,-1) = f(2\pi,-1) = -1$$

e tre massimi sul bordo di A:

$$f(\pi,-1) = f(0,1) = f(2\pi,1) = 1.$$