Tutoraggio Analisi II

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Ingegneria Civile ed Industriale

Sapienza Università di Roma

Andrea Di Biagio*

Settimana 5

Curve di Jordan, Lunghezze e Integrali Curivilinei di Prima Specie

Esercizio 1.
Determinare se la curva

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{cases} (t, t^2), & t \in [0,1) \\ (2-t, 2-t), & t \in [1,2] \end{cases} \end{aligned}$$

è una curva di Jordan (e in caso determinarne l'orientazione). Calcolare il vettore velocità $\boldsymbol{\gamma}'$ della curva e la sua norma.

Esercizio 2.
Verificare che la curva

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} : [0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\longmapsto \begin{cases} (e^\theta - 1, e^{2\theta} - 2e^\theta + 1), & \theta \in [0, \ln 2) \\ (3 - e^\theta, 3 - e^\theta), & \theta \in [\ln 2, \ln 3] \end{cases} \end{aligned}$$

sia equivalente alla curva $\boldsymbol{\gamma}$ dell'esercizio precedente.

Esercizio 3.
La curva

$$\boldsymbol{\gamma}(z) = \left(r\cos\left(\frac{2\pi z}{d}\right), r\sin\left(\frac{2\pi z}{d}\right), z \right)$$

descrive una spirale cilindrica di raggio r che fa un giro ogni d unità di distanza. Calcolare la lunghezza di questa curva per $t \in [0, Nd]$ (questo può servire per calcolare quanto materiale serve per fare N giri).

Esercizio 4.
Calcolare la lunghezza della curva

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(\sinh t^2, 6\sinh t^2\right). \end{aligned}$$

*andrea.dibiagio@uniroma1.it

Esercizio 5.
Calcolare l'integrale curvilinea di prima specie

$$I = \int_\gamma y \mathrm{d}s$$

lungo la curva

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0,T] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t^4, t^2) \end{aligned}$$

Esercizio 6.
Calcolare l'integrale curvilinea di prima specie

$$I = \int_{\boldsymbol{\gamma}} xy^2 \mathrm{d}s$$

dove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(t, \sqrt{1-t^2}\right) \end{aligned}$$

Esercizio 7.
Calcolare l'integrale curvilinea di prima specie

$$\tilde{I} = \int_{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}} xy^2 \mathrm{d}s$$

dove

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} : [0,\pi/2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos\theta, \sin\theta) \end{aligned}$$