Tutoraggio Analisi II

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Ingegneria Civile ed Industriale

Sapienza Università di Roma

Andrea Di Biagio*

Settimana 6

Forme Differenziali ed Integrali di Seconda Specie

Esercizio 1.

Dato il campo vettoriale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \big(e^x + y, y^2 + x\big) \end{aligned}$$

e la curva[1]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\longmapsto \left(\cos\theta, \frac{\sin\theta}{\theta}\right), \end{aligned}$$

- Scrivere la forma differenziale ω associata a $\boldsymbol{F}$,
- Scrivere l'espressione esplicita dell'integrale curvilineo di seconda specie $I = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega$
- Dimostrare che ω è chiusa.
- Dimostrare che ω è esatta trovando una funzione potenziale $\mathcal{U} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ di ω.
- Usare $\mathcal{U}$ per calcolare I.

Esercizio 2.

Sia γ la frontiera del rettangolo $R = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, \pi/2], y \in [0, 1]\big\}$ orientata positivamente. Sia $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1\big\}$ e ω la forma differenziale associata all campo vettoriale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} : E &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \left(y\cos(xy) + \frac{1}{1+x}, x\cos(xy) + x\right). \end{aligned}$$

- Dimostrare che ω non è una forma esatta.
- Calcolare $I = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega$.
- Sia $\tilde{\omega}(x, y) = x\mathrm{d}y$. Calcolare $\tilde{I} = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \tilde{\omega}$.
- Dimostrare che la forma $\kappa = \omega - \tilde{\omega}$ è esatta.

*andrea.dibiagio@uniroma1.it

[1] Per essere davvero precisi, dovremmo scrivere $\boldsymbol{\gamma}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sinc}\theta)$, dove sinc è la funzione differenziabile data da $\operatorname{sinc}\theta = \frac{\sin\theta}{\theta}$ se $\theta \neq 0$ e $\operatorname{sinc}(0) = 1$.

Esercizio 3.
Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $g :\to \mathbb{R}$ due funzioni continue definite su gli intervalli $A, B \subset \mathbb{R}$. Dimostrare che la forma differenziale

$$\omega(x, y) = f(x)\mathrm{d}x + g(y)\mathrm{d}y$$

è esatta nell'insieme $A \times B \subset \mathbb{R}^2$.

Esercizio 4.
Data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = (\tanh x + yx)\,\mathrm{d}x + (\ln y + x)\,\mathrm{d}y,$$

e la curva

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(\cos t, e^t\right), \end{aligned}$$

Calcolare $I = \int_{\gamma} \omega$.