Esercitazione Matematica Analisi II - Soluzioni

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica,
Ingegneria Civile ed Industriale

Sapienza Università di Roma

Docente: Anna Chiara Lai

Tutor: Andrea Di Biagio

7 maggio 2021

Esercizio 1.
Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine della seguente funzione:

$$
\begin{aligned}
&f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\
&(x, y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^3 + yx^3}{x^2 + 6y^2} & \text{se}(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}
\end{aligned}
$$

Soluzione 1.
Continuità. Per dimostrare che f è continua all'origine dobbiamo dimostrare $f(x, y) \to f(0, 0) = 0$ per $(x, y) \to (0, 0)$. Passando in coordinate polari, questo è equivalente a dimostrare che $f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \to 0$ per $\rho \to 0^+$, uniformemente rispetto a θ. Per soddisfare quest'ultima condizione, è sufficiente trovare una funzione $g(\rho)$ tale che $|f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)| \leq g(\rho)$ e che $\lim_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0$.

Osserviamo che per ogni $\rho > 0$ e per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$

$$|f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)| = \frac{|\cos^3\theta(1 + \rho \sin\theta)|}{\cos^2\theta + 6\sin^2\theta} \cdot \rho.$$

Notiamo che il denominatore è sempre maggiore o uguale a 1, perchè $\cos^2\theta + 6\sin^2\theta \geq \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ quindi possiamo stimare

$$|f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)| = \frac{|\cos^3\theta(1 + \rho \sin\theta)|}{\cos^2\theta + 6\sin^2\theta} \cdot \rho \leq |\cos^3\theta(1 + \rho \sin\theta)| \cdot \rho \leq \rho + \rho^2.$$

Posto quindi $g(\rho) := \rho + \rho^2$ abbiamo

$$|f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)| \leq g(\rho) \to 0 \qquad \text{per } \rho \to 0^+$$

e questo dimostra la continuità di f in $(0, 0)$.

Derivabilità. Calcoliamo le derivate parziali all'origine usando la definizione. A tal fine osserviamo che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^3}{h^2} = 1, \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{0}{6h^2} = 0.$$

Poiché entrambi i limiti sopra esistono e sono finiti, tali limiti per definizione sono rispettivamente le derivate parziali $\partial_x f(0, 0)$ e $\partial_y f(0, 0)$ e pertanto f è derivabile in $(0, 0)$.

Differenziabilità. Per definizione f è differenziabile nell'origine se e solo se

$$f(x,y) = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle + o\left(\|(x,y))\|\right), \qquad \text{per } (x,y) \to (0,0).$$

o, equivalentemente, se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle}{\|(x,y))\|} = 0.$$

Sostituendo nell'espressione sopra i valori $f(0,0) = 0$ e $\nabla f(0,0) = (1,0)$, dobbiamo quindi dimostrare che:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - x}{\|(x,y))\|} = 0.$$

Sostituendo il valore di $f(x,y)$ nel limite sopra otteniamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y - 6xy^2}{x^2+6y^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Osserviamo che il limite sopra, ristretto alla generica retta $y = x$, è equivalente a

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 - 6x^3}{7x^2} \frac{1}{|x|\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x| 7\sqrt{2}}.$$

Tale limite non esiste pertanto, per il teorema delle restrizioni, neanche il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y - 6xy^2}{x^2+6y^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

esiste e quindi la funzione non è differenziabile nell'origine.

Esercizio 2.
Dato il campo vettoriale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &: (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \left(\frac{y}{x} x^y - y\sin(xy), \ln(x)x^y - x\sin(xy) + 1 + x \right) \end{aligned}$$

e la curva

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &: [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, \sin t) \end{aligned}$$

calcolare l'integrale curvilineo $I = \int_{\gamma} \boldsymbol{\omega}$, dove $\boldsymbol{\omega}$ è la forma differenziale associata a $\boldsymbol{F}$. *Suggerimento: decomporre la forma differenziale $\boldsymbol{\omega}$ nella somma $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ dove $\boldsymbol{\omega}_1 = d\mathcal{U}$ è forma differenziale esatta e $\boldsymbol{\omega}_2$ è una forma differenziale non esatta.*

Soluzione 2.
Osserviamo preliminarmente che la forma $\boldsymbol{\omega}$ non è chiusa, quindi non è esatta. Tuttavia è sempre possibile scrivere $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ dove $\boldsymbol{\omega}_1 = d\mathcal{U}$ è forma differenziale esatta e $\boldsymbol{\omega}_2$ è una forma differenziale non esatta. Per trovare un potenziale associato alla forma differenziale $\boldsymbol{\omega}_1$, iniziamo con l'integrare la seconda componente di $\mathbf{F}$, il campo associato ad $\boldsymbol{\omega}$, rispetto ad y:

$$\int \left(\ln(x) e^{y\ln(x)} - x\sin(xy) + 1 + x \right) \mathrm{d}y = x^y + \cos(xy) + y + yx + C_1(x)$$

D'altro canto, integrando rispetto ad x la prima componente

$$\int \left(\frac{y}{x}e^{y\ln(x)} - y\sin(xy)\right) \mathrm{d}y = x^y + \cos(xy) + C_2(y)$$

Dal confronto delle primitive sopra, otteniamo che se $\mathcal{U}(x,y) = x^y + \cos(xy) + y$ (corrispondente alla scelta $C_1(x) = 0$ e $C_2(y) = y$) allora, posto $\boldsymbol{\omega}_1 := d\mathcal{U}$ otteniamo che $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_1 = xdy =: \boldsymbol{\omega}_2$. Per la linearità dell'integrale, abbiamo

$$I = \int_\gamma \boldsymbol{\omega} = \int_\gamma (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) = \int_\gamma \boldsymbol{\omega}_1 + \int_\gamma \boldsymbol{\omega}_2.$$

Poiché $\boldsymbol{\omega}_1 = d\mathcal{U}$ otteniamo immediatamente

$$\begin{aligned}\int_\gamma \boldsymbol{\omega}_1 &= \mathcal{U}(\gamma(2\pi)) - \mathcal{U}(\gamma(\pi)) = \mathcal{U}(2\pi, \sin(2\pi)) - \mathcal{U}(\pi, \sin(\pi)) \\ &= \mathcal{U}(2\pi, 0) - \mathcal{U}(\pi, 0) = 0.\end{aligned}$$

D'altro canto, il campo vettoriale associato a $\boldsymbol{\omega}_2$ è $G(x,y) := (0,x)$

$$\begin{aligned}\int_\gamma \boldsymbol{\omega}_1 &= \int_\pi^{2\pi} \langle G(\boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\gamma}'(t)\rangle dt \\ &= \int_\pi^{2\pi} \langle (0,t), (1, \cos t)\rangle dt \\ &= \int_\pi^{2\pi} t\cos t dt = t\sin t|_\pi^{2\pi} - \int_\pi^{2\pi} \sin t dt = \cos t|_\pi^{2\pi} = 2.\end{aligned}$$

Possiamo infine dedurre che $I = 0 + 2 = 2$.

Esercizio 3.
Siano N funzioni $g_i : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrabili in Ω tali che

$$\iint_\Omega g_i(x,y)g_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Sia $f(x,y) : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^N A_i g_i(x,y),$$

per una collezione di numeri reali A_i, $i = 1, \dots, N$. Dimostrare che f è integrabile in Ω e che per ogni $i = 1, \dots, N$

$$A_i = \iint_\Omega f(x,y)g_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Soluzione 3.
La combinazione lineare di un numero finito di funzioni integrabili in Ω è una funzione integrabile in Ω, quindi f è una funzione integrabile in Ω. Per definizione abbiamo

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)g_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_D \left(g_i(x,y)\sum_{j=1}^N A_j g_j(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \left(\sum_{j=1}^N A_j g_j(x,y)g_i(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

dove nello scrivere la seconda uguaglianza abbiamo semplicemente distribuito un fattore nella somma. In seguito, usando la linearità dell'integrale, possiamo scambiare l'ordine dell'integrale e la somma:

$$\iint_D f(x,y)g_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{j=1}^{N} \iint_D A_j g_j(x,y)g_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{j=1}^{N} A_j \iint_D g_j(x,y)g_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ora, usando la proprietà delle funzioni g_i data nella traccia, abbiamo:

$$\iint_D f(x,y)g_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{j=1}^{N} A_j\delta_{ij} = A_i,$$

che era ciò che volevamo dimostrare.

Domanda 1. Enunciare il Teorema della Funzione Implicita per funzioni di due variabili a valori scalari.

Risposta 1. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) \end{aligned}$$

continua e sia $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Se $\partial_x f$ è continua in X e se $\partial_x f(x_0,y_0) \neq 0$, allora esiste un intorno di $U \subset \mathbb{R}$ di x_0, un intorno $V \subset \mathbb{R}$ di y_0 e un unica funzione continua $g : V \to U$ tali che $U \times V \subset X$ e

$$\{(x,y) \in U \times V \mid f(x,y) = f(x_0,y_0)\} = \{(x,y) \in U \times V \mid x = g(y)\}.$$

Domanda 2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e sia $H(0,0)$ la sua matrice hessiana nel punto stazionario $(0,0)$. Allora:

A) se $(0,0)$ è punto di sella per f allora $H(0,0)$ è indefinita;

B) se $H(0,0)$ è indefinita, allora $(0,0)$ è punto di sella per f;

C) se $H(0,0)$ è semidefinita, allora $(0,0)$ è punto di sella per f;

D) se $(0,0)$ è punto di sella per f allora $H(0,0)$ è semidefinita.

Risposta 2. La risposta corretta è B. Se