Tutoraggio Analisi II

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Ingegneria Civile ed Industriale
Sapienza Università di Roma

Docente: Anna Chiara Lai
Tutor: Andrea Di Biagio*

Settimana 9
Superfici ed Integrali di Superficie

Esercizio 1.
Sia

$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2=1\right\}.$$

la sfera di raggio 1 centrata all'origine e si consideri l'insieme:

$$C = \left\{(x,y,z) \in S^2 \;\middle|\; z \geq 0\right\}.$$

Dimostrare, che C è una superficie elementare. Trovare cioè un sottoinseme $D \subset \mathbb{R}^2$ interno di una curva di Jordan e una mappa $\boldsymbol{\sigma} : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ tale che $\boldsymbol{\sigma}|_D$ è iniettiva e $\boldsymbol{\sigma}(\bar{D}) = C$. La mappa $\boldsymbol{\sigma}$ è detta una *parametrizzazione* di C. Trovare il bordo di C.

Esercizio 2.
Sia $D = (0,\infty) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$. La mappa

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \bar{D} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,\phi) &\longmapsto \left(\frac{2r\cos\phi}{1+r^2}, \frac{2r\sin\phi}{1+r^2}, \frac{r^2-1}{1+r^2}\right) \end{aligned}$$

fornisce una parametrizzazione della sfera con un punto rimosso $\Sigma = S^2 \setminus \{\boldsymbol{N}\}$. Trovare il punto $\boldsymbol{N}$. Calcolare l'area della sfera usando questa parametrizzazione. Σ ha un bordo?

Esercizio 3.
Sia $R = (1,2) \times (0,2\pi)$ e sia Σ la superficie parametrizzata da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \bar{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta) &\longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, r\cos\theta) \end{aligned}$$

Dimostrare che Σ è una superficie elementare e trovarne il bordo. Calcolare l'area $A(\Sigma)$ di Σ, e poi calcolare l'integrale:

$$I = \iint_\Sigma f \mathrm{d}S$$

della funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto x \end{aligned}$$

*andrea.dibiagio@uniroma1.it

Integrale di f. Per definizione:

$$I = \iint_{\bar{R}} f(\boldsymbol{\sigma}(r,\theta))\|\boldsymbol{n}(r,\theta)\|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{2}r^2 \cos\theta \mathrm{d}\theta\right) \mathrm{d}r$$

e quindi $I = 0$ perché $\int_0^{2\pi} \cos\theta \mathrm{d}\theta = 0$.

Esercizio 4.

Sia $\tilde{R} = (1,2) \times (0, 4\pi)$ e sia $\tilde{\Sigma}$ la superficie parametrizzata da

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\tilde{R}} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta) &\longmapsto \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

Come mai $\tilde{\Sigma}$ non è una superficie elementare?