Tutoraggio Analisi II

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Ingegneria Civile ed Industriale
Sapienza Università di Roma

Docente: Anna Chiara Lai
Tutor: Andrea Di Biagio*

Settimana 8
Estremi Vincolati ed Integrali Doppi

Esercizio 1.
Calcolare l'area dell'insieme:

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(x^2+y^2\right)^2 - 2x\left(x^2+y^2\right) - y^2 \leq 0 \right\}.$$

Soluzione 1.
L'area di questo insieme è dato dall'integrale:

$$A = \iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Si potrebbe valutare questo integrale dimostrando che Ω è un insieme semplice, però questo richiede trovare le radici di un polinomio di quarto grado. In più non è facile disegnare questo insieme a partire dalla diseguaglianza. Invece la presenza di x^2+y^2 suggerisce il passaggio a coordinate polari:

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta), \quad r \geq 0, \theta \in [0,2\pi)$$

Dove abbiamo

$$\begin{aligned}
\left(x^2+y^2\right)^2 - 2x\left(x^2+y^2\right) - y^2 &= r^4 - 2r^3\cos\theta - r^2\sin^2\theta \\
&= r^2\left(r^2 - 2r\cos\theta - sin^2\theta\right) \\
&= r^2\left((r-\cos\theta)^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\
\left(x^2+y^2\right)^2 - 2x\left(x^2+y^2\right) - y^2 &= r^2\left((r-\cos\theta)^2 - 1\right)
\end{aligned}$$

e quindi la diseguaglianza diventa

$$\begin{aligned}
&(r-\cos\theta)^2 \leq 1 \\
\iff &-1 \leq r - \cos\theta \leq 1 \\
\iff &\quad \cos\theta - 1 \leq r \leq 1 + \cos\theta.
\end{aligned}$$

E siccome $r \geq 0$ per definizione, la doppia diseguaglianza diventa: $0 \leq r \leq 1+\cos\theta$ e

$$\Omega = \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \theta \in [0,2\pi], 0 \leq r \leq 1+\cos\theta \right\}.$$

Ω è quindi un insieme semplice in coordinate polari, e possiamo scrivere l'integrale:

$$A = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1+\cos\theta} |\det J(r,\theta)| \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta,$$

*andrea.dibiagio@uniroma1.it

dove $J(r,\theta)$ è la Jacobiana per il cambio di variabili in coordinate polari:

$$J(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$A = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1+\cos\theta} r\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Esercizio 2.
Calcolare il volume dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x+y+3z)^2 + (x-y)^2 + (x+y+2z)^2 \leq 1, |x-y| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Soluzione 2.
Il volume che cerchiamo è dato dall'integrale triplo:

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Come prima, potremmo dimostrare che Ω è semplice, ma è più facile cercare un cambio di variabili adatto. In particolare, se poniamo:

$$\begin{aligned} u &= x + y + 3z \\ v &= x - y \\ w &= x + y + 2z \end{aligned}$$

le diseguaglianze si semplificano molto. Notiamo che questa è una trasformazione lineare:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

dove M è la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo quindi effettuare il cambio di variabili:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(u,v,z) \\ \psi_2(u,v,z) \\ \psi_3(u,v,z) \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

La pre-immagine di Ω è:

$$S = \mathbf{\Psi}^{-1}(\Omega) = \left\{ (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; u^2 + v^2 + w^2 \leq 1, |v| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Notiamo che la matrice Jacobiana di un cambio di variabili lineare non è altro che la matrice stessa. Quindi non ci serve calcolare esplicitamente la matrice M^{-1}, perché in generale:

$$\det J_{\boldsymbol{\psi}}(u,v,w) = \frac{1}{\det J_{\boldsymbol{\psi}^{-1}}(x,y,z)}$$

e in questo caso in particolae

$$\det J_{\boldsymbol{\psi}}(u,v,w) = \det\left(M^{-1}\right) = (\det M)^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Quindi il volume ora è dato dall'integrale:

$$V = \frac{1}{2}\iiint_S \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

Vediamo che S è la parte della palla di raggio 1 contenuta tra i due piani $v = \pm 1/2$. Il modo più facile di calcolare questo integrale è di fare un ulteriore cambio di variabili in coordinate cilindriche:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(r,\theta,h) \\ \phi_2(r,\theta,h) \\ \phi_3(r,\theta,h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ h \\ r\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad r \in [0,\infty), \theta \in [0,2\pi), h \in \mathbb{R}.$$

La pre-immagine di S è:

$$P := \boldsymbol{\Phi}^{-1}(S) = \left\{ (r,\theta,h) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R} \;\middle|\; r^2 + h^2 \leq 1, |h| < \frac{1}{2} \right\}.$$

La Jacobiana di questa trasformazione è

$$J_{\boldsymbol{\phi}}(r,\theta,h) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

con determinante $\det J_{\boldsymbol{\phi}}(r,\theta,h) = r$. Quindi possiamo scrivere di nuovo il volume:

$$V = \frac{1}{2}\iiint_P r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}h.$$

Calcoliamo V. Notiamo che P è semplice rispetto all'asse r, siccome dentro P abbiamo

$$0 \leq r \leq \sqrt{1-h^2}$$

Quindi possiamo scrivere

$$V = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\int_0^{\sqrt{1-h^2}}\left(\int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}h$$

E poi calcoliamo, facendo prima l'integrale in θ, poi quella in r e infine quella in h:

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-1/2}^{1/2}\left(\int_0^{\sqrt{1-h^2}} r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}h \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-1/2}^{1/2}(1-h^2)\mathrm{d}h = \pi\int_0^{1/2}(1-h^2)\mathrm{d}h \\ &= \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right) \\ V &= \frac{11}{24}\pi \end{aligned}$$

Esercizio 3.
Calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_\Omega x^2 e^{-(xy)^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

con

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y \leq 5x, xy < 2\right\}$$

Soluzione 3.
Disegnando le curve $y = 5x$, $y = x$ e $y = 2/x$, si vede che Ω è nel primo quadrante del piano, con $x, y \neq 0$. Vista la forma delle diseguaglianze e dell'integrando, studiamo il cambio di variabili

$$u = xy, \qquad v = \frac{y}{x}.$$

Questa mappa è biiettiva nel primo quadrante del piano. Abbiamo

$$\det J_{\boldsymbol{\psi}}(u, v) = \left(\det J_{\boldsymbol{\psi}^{-1}}(x, y)\right)^{-1}$$

con

$$\det J_{\boldsymbol{\psi}^{-1}}(x, y) = \det \begin{pmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{pmatrix} = 2\frac{y}{x}$$

e quindi

$$\det J_{\boldsymbol{\psi}}(u, v) = \frac{1}{2v}.$$

La pre-immagine di Ω è un rettangolo:

$$R := \boldsymbol{\psi}^{-1}(\Omega) = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < v \leq 5, 0 < u < 2\right\},$$

Notiamo anche che

$$x^2 e^{-(xy)^2} = \frac{u}{v} e^{-u^2}$$

L'integrale che cerchiamo è quindi:

$$I = \iint_R \frac{1}{2v} \frac{u}{v} e^{-u^2} \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 u e^{-u^2} \mathrm{d}u\right) \left(\int_1^5 \frac{1}{v^2} \mathrm{d}v\right).$$

Facciamo i due integrali uno alla volta:

$$\int_0^2 u e^{-u^2} \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int_0^4 e^{-t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-4}\right)$$

$$\int_1^5 v^{-2} \mathrm{d}v = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

e quindi

$$I = \frac{1}{5}\left(1 - e^{-4}\right).$$