Tutoraggio Analisi II

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Ingegneria Civile ed Industriale

Sapienza Università di Roma

Andrea Di Biagio*

Settimana 6

Forme Differenziali ed Integrali di Seconda Specie

Esercizio 1.

Dato il campo vettoriale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto \big(e^x + y, y^2 + x\big) \end{aligned}$$

e la curva[1]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\longmapsto \left(\cos\theta, \frac{\sin\theta}{\theta}\right), \end{aligned}$$

- Scrivere la forma differenziale ω associata a $\boldsymbol{F}$,
- Scrivere l'espressione esplicita dell'integrale curvilineo di seconda specie $I = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega$
- Dimostrare che ω è chiusa.
- Dimostrare che ω è esatta trovando una funzione potenziale $\mathcal{U} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ di ω.
- Usare $\mathcal{U}$ per calcolare I.

Soluzione 1.

Forma differenziale. La forma differenziale ω associata a $\boldsymbol{F}$ è l'espressione

$$\omega := \langle \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \rangle := (e^x + y)\, \mathrm{d}x + \big(y^2 + x\big)\, dy.$$

Integrale Curvilineo. Per definizione,

$$I = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega : \int_0^{2\pi} \big\langle \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\gamma}(\theta)\big), \boldsymbol{\gamma}'(\theta) \big\rangle\, \mathrm{d}\theta.$$

Calcoliamo quindi il vettore tangente:

$$\boldsymbol{\gamma}'(\theta) = \left(-\sin\theta, \frac{\cos\theta}{\theta} - \frac{\sin\theta}{\theta^2}\right),$$

e scriviamo anche i valori di $\boldsymbol{F}$ lungo la curva:

$$\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{\gamma}(\theta)\big) = \left(e^{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\theta}, \frac{\sin^2\theta}{\theta^2} + \cos\theta\right).$$

L'integrale è quindi:

$$I = \int_0^{2\pi} \left[-\sin\theta\left(e^{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\theta}\right) + \left(\frac{\sin^2\theta}{\theta^2} + \cos\theta\right)\left(\frac{\cos\theta}{\theta} - \frac{\sin\theta}{\theta^2}\right)\right] \mathrm{d}\theta.$$

*andrea.dibiagio@uniroma1.it

[1] Per essere davvero precisi, dovremmo scrivere $\boldsymbol{\gamma}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sinc}\theta)$, dove sinc è la funzione differenziabile data da $\operatorname{sinc}\theta = \frac{\sin\theta}{\theta}$ se $\theta \neq 0$ e $\operatorname{sinc}(0) = 1$.

Forma chiusa. La forma associata ad un campo vettoriale $\boldsymbol{V}$ si dice chiusa se $\partial_i V_j = \partial_j V_i$ per ogni i e j. Nel nostro caso abbiamo

$$\partial_y F_x = 1 = \partial_x F_y$$

e quindi la forma è chiusa.
Forma esatta. Una forma $\omega = F_1 \mathrm{d}x^1 + \cdots F_n \mathrm{d}x^n$ si dice esatta se esiste una funzione $\mathcal{U}$ tale che $\mathrm{d}\mathcal{U} = \omega$, dove

$$\mathrm{d}\mathcal{U} := \langle \boldsymbol{\nabla}\mathcal{U}, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \rangle = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \cdots + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x^n}\mathrm{d}x^n.$$

Per dimostrare che la nostra forma ω è esatta dobbiamo quindi trovare un potenziale $\mathcal{U}$. Questo deve soddisfare le due equazioni:

$$\partial_x \mathcal{U}(x,y) = e^x + y, \qquad \partial_y \mathcal{U}(x,y) = y^2 + x.$$

Risolviamo queste equazioni una alla volta. Integriamo la prima equazione:

$$\mathcal{U}(x,y) = \int (e^x + y)\mathrm{d}x = e^x + xy + u(y),$$

dove $u(y)$ è la "costante di integrazione," che non dipende da x ma dipende da y. Ora differenziamo questa equazione rispetto a y,

$$\partial_y \mathcal{U}(x,y) = x + u'(y),$$

e vediamo quindi[2] che se $u'(y) = y^2$ allora $\mathcal{U}$ è un potenziale di ω. Questa equazione è risolta per esempio da $u(y) = y^3/3$. Quindi la funzione

$$\mathcal{U}(x,y) = e^x + \frac{1}{3}y^3 + xy$$

è un potenziale di ω, che è quindi una forma esatta.
Integrale. Siccome ω è esatta, l'integrale I è dato semplicemente dalla differenza del potenziale ai punti estremi di $\boldsymbol{\gamma}$:

$$I = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = \mathcal{U}(\boldsymbol{\gamma}(2\pi)) - \mathcal{U}(\boldsymbol{\gamma}(0)).$$

Abbiamo $\boldsymbol{\gamma}(0) = (1,1)$ e $\boldsymbol{\gamma}(2\pi) = (1,0)$, quindi

$$I = e - (e + \frac{1}{3} + 1) = -\frac{4}{3}.$$

Esercizio 2.
Sia γ la frontiera del rettangolo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,\pi/2], y \in [0,1]\}$ orientata positivamente. Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1\}$ e ω la forma differenziale associata all campo vettoriale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &: E \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto \left(y\cos(xy) + \frac{1}{1+x}, x\cos(xy) + x \right). \end{aligned}$$

- Dimostrare che ω non è una forma esatta.
- Calcolare $I = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega$.

[2]NB: Siccome u dipende da una sola variabile, abbiamo $\frac{\partial}{\partial y}u(y) = \frac{d}{dy}u(y) =: u'(y)$.

- Sia $\tilde{\omega}(x, y) = x\mathrm{d}y$. Calcolare $\tilde{I} = \int_\gamma \tilde{\omega}$.
- Dimostrare che la forma $\kappa = \omega - \tilde{\omega}$ è esatta.

Soluzione 2.
ω non è chiusa. Notiamo che $\partial_y F_x = \cos(xy) - xy\sin(xy)$ mentre $\partial_x F_y = \cos(xy) - xy\sin(xy) = 1$. La forma ω quindi non è chiusa e quindi non può essere esatta.
Integrale Siccome ω non è esatta, I non sarà necessariamente 0. Rompiamo l'integrale in quattro pezzi $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ e calcoliamo.

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} F_x(x, 0)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_2 = \int_0^1 F_y\left(\frac{\pi}{2}, y\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) + \frac{\pi}{2}\right]\mathrm{d}y = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right]_{y=0}^{y=1} + \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{\pi}{2}$$

$$I_3 = \int_{\pi/2}^0 F(x, 1)\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^0 \left[\cos x + \frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x = [\sin x + \ln(1+x)]_{x=\pi/2}^{x=0} = -1 - \ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_4 = \int_1^0 F_y(0, y)\,\mathrm{d}y = \int_1^0 0\mathrm{d}y = 0$$

Prendete un momento per convincervi che I_3 e I_4 sono scritti giusti. Per I_3, stiamo facendo l'integrale curvilineo di ω sul segmento di retta che va dal punto $(\pi/2, 1)$ a $(0, 1)$. Possiamo scegliere qualungue parametrizzazione, ma scegliamo la curva $\boldsymbol{s} : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ data da $\boldsymbol{s}(t) = (\pi/2 - t, 1)$. Quindi il vettore tangente è $\boldsymbol{s}'(t) = (-1, 0)$ e l'integrale è dato da

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}(t)), \boldsymbol{s}'(t)\rangle \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} -F_x\left(\frac{\pi}{2} - t, 1\right)\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 F(x, 1)\mathrm{d}x,$$

dove alla fine abbiamo fatto il cambio di variabili $x = \pi/2 - t$. Un modo più veloce di vedere la stessa cosa è che possiamo prendere la curva $\tilde{\boldsymbol{s}}(t) = (t, 1)$, equivalente a $\boldsymbol{s}$ ma orientata nel senso opposto, quindi sappiamo che $I_3 = -\int_{\tilde{s}} \omega$ e quindi

$$I_3 = -\int_0^{\pi/2} F_x(t, 1)\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 F_x(t, 1)\mathrm{d}t.$$

Un ragionamento completamente analogo vale per I_4 (anche se non importa perché $-0 = 0$).

In conclusione, $I = \frac{\pi}{2}$.
Integrale di $\tilde{\omega}(x, y) = x\mathrm{d}y$. Le uniche integrali rilevanti sono quelle in cui $x \neq 0$ e y cambia. nel nostro caso ci sta sono uno dei quattro lati del rettangolo:

$$\tilde{I} = \int_0^1 \tilde{F}_y\left(\frac{\pi}{2}, y\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\pi}{2}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} = I.$$

$\kappa = \omega - \tilde{\omega}$ è esatta. Notiamo che

$$\kappa(x, y) = \left(y\cos(xy) + \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x + x\cos(xy)\mathrm{d}y =: \langle \boldsymbol{K}, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\rangle$$

è chiusa, siccome:

$$\partial_y K_x(x, y) = \cos(xy) - xy\sin(xy) = \partial_x K_y(xy).$$

Quindi è plausibile che sia anche esatta. Se esiste un potenziale $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}^2$ per κ, questo soddisfa

$$\mathcal{U}(x,y) = \int K_y(x,y)\mathrm{d}y = \int x\cos(xy)\mathrm{d}y = \sin(xy) + u(x).$$

Poi dobbiamo avere anche

$$\partial_x\mathcal{U}(x,y) = y\cos(xy) + u'(x) = y\cos(xy) + \frac{1}{1+x}.$$

Quindi la funzione $\mathcal{U}(x,y) = \sin(xy) + \ln(1+x)$ è un potenziale di κ, che è quindi una forma esatta.

Ora capiamo che $I = \tilde{I}$ segue immediatamente dalla linearità dell'integrale:

$$I = \int_\gamma \omega = \int_\gamma (\tilde{\omega} + \kappa) = \int_\gamma \tilde{\omega} + \int_\gamma \kappa = \int_\gamma \tilde{\omega} = \tilde{I}.$$

se avessimo notato subito che ω era la somma di $x\mathrm{d}y$ e una forma chiusa, avremmo potuto fare solo un integrale invece di 4 per trovare I.

Esercizio 3.

Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : \to \mathbb{R}$ due funzioni continue definite su gli intervalli $A, B \subset \mathbb{R}$. Dimostrare che la forma differenziale

$$\omega(x,y) = f(x)\mathrm{d}x + g(y)\mathrm{d}y$$

è esatta nell'insieme $A \times B \subset \mathbb{R}^2$.

Soluzione 3.

Assumiamo che esiste un potenziale $\mathcal{U} : A \times B \to \mathbb{R}$ per ω. Allora l'integrale curvilineo di ω su qualunque curva è uguale alla differenza dei valori di $\mathcal{U}$ agli estremi della curva. Quindi in particolare

$$\mathcal{U}(x_1,y_1) - \mathcal{U}(x_0,y_0) = \int_\gamma \omega$$

dove $\boldsymbol{\gamma}$ è una qualunque curva in $A \times B$ che inizia nel punto (x_0,y_0) e termina nel punto (x_1,y_1). Specializziamoci ancora di più scegliendo una curva che prima percorre il segmento di retta che connette (x_0,y_0) ed il punto (x_1,y_0), e poi il segmento che connette questo punto con (x_1,y_1). Abbiamo quindi

$$\mathcal{U}(x_1,y_1) - \mathcal{U}(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y_1} g(y)\mathrm{d}y.$$

Si scelgano due funzioni F e G primitive di f e g rispettivamente. Allora

$$\mathcal{U}(x_1,y_1) = F(x_1) + G(y_1) - \big(F(x_0) + G(y_0) - \mathcal{U}(x_0,x_0)\big).$$

Abbiamo scelto due punti arbitrari dentro $A \times B$, ma ora tenendo fisso (x_0,y_0), e variando (x_1,y_1) vediamo che se $\mathcal{U}$ esiste, è dato dall'espressione

$$\mathcal{U}(x,y) = F(x) + G(y) + C$$

dove C è una costante. Rimane da dimostrare che questo è in effetti un potenziale per ω:

$$\mathrm{d}\mathcal{U}(x,y) := \partial_x\mathcal{U}(x,y)\mathrm{d}x + \partial_y\mathcal{U}(x,y)\mathrm{d}y = F'(x)\mathrm{d}x + G'(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x + g(y)\mathrm{d}y = \omega(x,y).$$

Abbiamo dimostrato che è sempre possibile trovare un potenziale per questo tipo di forma, che è quindi esatta.

Esercizio 4.
Data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = (\tanh x + yx)\,\mathrm{d}x + (\ln y + x)\,\mathrm{d}y,$$

e la curva

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(\cos t, e^t\right), \end{aligned}$$

Calcolare $I = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega$.

Soluzione 4.
Notiamo innanzitutto che ω non è chiusa, perché $\partial_y(\tanh x + yx) = x$ ma $\partial_x(\ln y + x) = 1$. In compenso, possiamo scrivere $\omega = \kappa + \tilde{\omega}$, dove κ è la forma chiusa

$$\kappa(x, y) = \tanh x\ \mathrm{d}x + \ln y\ \mathrm{d}y$$

e $\tilde{\omega}$ la forma non chiusa:

$$\tilde{\omega}(x, y) = yx\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y.$$

Quindi invece di calcolare direttamente I, calcoliamo l'integrale di $\tilde{\omega}$ e di κ separatamente e sommiamo.

Cominciamo con κ. Possiamo avvalerci del risultato dell'esercizio precedente, e concludere che κ è esatta. Infatti è facile verificare[3] che

$$\mathcal{U}_\kappa(x, y) = \ln\cosh x + y\ln y - y$$

è un potenziale di κ. L'integrale $I_\kappa := \int_{\boldsymbol{\gamma}} \kappa$ è quindi uguale alla differenza di potenziale agli estremi $\boldsymbol{\gamma}(0) = (1, 1)$ e $\boldsymbol{\gamma}(2\pi) = (1, e^{2\pi})$:

$$I_\kappa = \mathcal{U}_\kappa(1, e^{2\pi}) - \mathcal{U}_\kappa(1, 1) = e^{2\pi}(2\pi - 1) + 1.$$

Passiamo ora a $\tilde{\omega}$. Il vettore tangente è $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (-\sin t, e^t)$, scriviamo quindi l'integrale

$$\tilde{I} := \int_{\boldsymbol{\gamma}} \tilde{\omega} = \int_0^{2\pi} \left[-\sin(t)\cos(t)e^t + \cos(t)e^t\right] \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left[\cos(t)e^t - \frac{1}{2}\sin(2t)e^t\right] \mathrm{d}t,$$

dove abbiamo usato l'identità trigonometrica $\sin(x + y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(y)\cos(x)$. Calcoliamo questa integrale un termine alla volta, cominciando con

$$I_1 := \int_0^{2\pi} \cos(t)e^t \mathrm{d}t.$$

Integrare per parti non funziona, né non sembra suggerirsi una sostituzione. Per calcolare questo tipo di integrali (e anche per ricordarsi le miriadi di formule trigonometriche) vengono spesso utili le espressioni:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Usando la prima otteniamo la primitiva di $\cos(t)e^t$:

$$\int \cos(t)e^t \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \left(e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+i}e^{(1+i)t} + \frac{1}{1-i}e^{(1-i)t}\right] + C,$$

che dopo un paio di passaggi di algebra si rivela essere

$$\int \cos(t)e^t \mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^t (\cos t + \sin t) + C.$$

Quindi

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(e^{2\pi} - 1\right)$$

Per trovare la primitiva di $f(t) := -\sin(2t)e^t$ possiamo usare lo stesso metodo. Alternativamente, possiamo usare la stretta parentela di seno e coseno e lasciare che la primitiva di $\cos(t)e^t$ ci ispiri ad indovinare che la funzione che cerchiamo dev'essere:

$$F(t) = A\left(-\sin(2t) + B\cos(2t)\right)e^t$$

dove A e B sono due costanti. Proviamo

$$F'(t) = A\left[-\sin(2t) + B\cos(2t) - 2\cos(2t) - 2B\sin(2t)\right]e^t = -A(1+2B)\sin(2t)e^t + A(B-2)\cos(2t)e^t.$$

Quindi $F'(t) = f(t)$ se $B = 2$ e $A(1+4) = 1$. La primitiva che cerchiamo è:

$$F(t) = \frac{1}{5}\left(2\cos(2t) - \sin(2t)\right)e^t.$$

Quindi

$$I_2 := \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[F(2\pi) - F(0)\right] = \frac{1}{5}\left[e^{2\pi} - 1\right].$$

Finalmente possiamo sommare tutto insieme:

$$\begin{aligned} I &= I_\kappa + I_1 + I_2 \\ &= e^{2\pi}(2\pi - 1) + 1 + \frac{7}{10}\left(e^{2\pi} - 1\right) \\ I &= \frac{3}{10} + \left(2\pi - \frac{3}{10}\right)e^{2\pi}. \end{aligned}$$

[3]Trovare il potenziale è solo un po' più difficile. Per trovare la primitiva di $\tanh(x)$ si fa la sostituzione $u = \cos(x)$. La primitiva di $\ln y$ si trova integrando per parti.